INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN TULCEA
OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
- faza locală 22 februarie 2014 –

Clasa a V-a

Subiectul 1. Să se determine cel mai mic şi cel mai mare număr natural *n de patru cifre,* pentru care numărul $a=2010^{2014}+2011^{2013}+2012^{2012}+2013^{2011}+2014^{2010}+n$ se divide cu 10.

Subiectul 2. Elevii din două clase 5A şi 5B au obţinut la teza de matematică suma notelor 415. Numarul total de elevi este 55, la clasa 5A sunt cu 5 elevi mai puţin decât la 5B, iar media notelor la clasa 5A este cu un punct mai mică decât media notelor obţinute de elevii de la 5B.

Să se afle :

a) numarul elevilor din fiecare clasă.

b) suma notelor la fiecare clasă

Subiectul 3. Arătaţi că oricum am alege două elemente ale mulţimii $A=\{1, 3, 5, 7, \ldots 2013\}$, fie suma, fie diferenţa acestora este multiplu de 4.

Clasa a VI-a

Subiectul 1. Fie numerele naturale a, b, c. Ştiind că: $\frac{a}{4}=\frac{b}{6}=\frac{c}{8}$

a) Aflaţi numărul natural nenul n astfel încât $\frac{a+c}{nb}$ este număr prim

b) Dacă: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{13}{144}$ determinaţi numerele a, b şi c.

Subiectul 2. Considerăm punctele A,O şi B coliniare, în această ordine. De o parte şi de alta a dreptei AB se duc semidreptele (OC şi (OD astfel încât $OC \perp OD$, semidreapta (OA interioară unghiului COD şi $m(\angle AOM)=\frac{4}{7}m(\angle AOD)$, unde (OM este bisectoarea $\angle AOC$.

a) Determinaţi $m(\angle AOC)$.

b) Dacă (ON este semidreapta opusă semidreptei (OM şi (OT $\perp$ (ON, unde (OT şi (OC sunt în acelaşi semiplan determinat de dreapta AB, arătaţi că (OT este bisectoarea $\angle BOC$

Subiectul 3. **a)** Aflaţi numărele naturale n pentru care: $\frac{1}{101}<\frac{6}{n}<\frac{1}{100}$.

b) Câte fracţii cu numărătorul cel mult egal cu 200 sunt cuprinse între $\frac{1}{101}$ şi $\frac{1}{100}$.

OLIMPIADA DE MATEMATICA
FAZA LOCALA TULCEA – 22 FEB. 2014

	BAREM CLASA a V-a	
Sub. 1	UC($2010^{2014}+2011^{2013}+2012^{2012}+2013^{2011}+2014^{2010}$)=0+1+6+7+6=(20) 0 Cel mai mic număr de patru cifre este 1000 cel mai mare număr de patru cifre este 9990	4 p 1 p 2 p
Sub. 2	a) Prima clasă are n elevi şi a doua n+5, Solutie n=25 Finalizare 25 şi 30 elevi b) Daca m este media notelor la 5A suma notelor este 25m Suma notelor la 5B este 30(m+1) =30m + 30 25m + 30m+30 = 415 rezulta m=385:55=7 Finalizare 25·7=175 si 30.8=240	1 p 1 p 1 p 1 p 1 p 1 p 1 p
Sub.3	Două elemente din A sunt de forma 2k+1 şi 2l+1, k, l, numere naturale, k<l Suma S=2(k+l+1) iar diferenţa este D= 2(l-k) Pentru k par şi l impar sau invers S este multiplu de 4 Pentru k şi l de aceeaşi paritate d este multiplu de 4	1 p 2 p 2 p 2 p

Se puncteaza corespunzator orice solutie alternativa

	BAREM CLASA a VI-a	
Sub. 1	a) a=4k, b=6k, c=8k $\frac{a+c}{nb}=\frac{12k}{6kn}=\frac{2}{n}$ este, număr prim dacă n=1 b) Inlocuirea numerelor a, b, c si calculul sumei fractiilor Determinarea lui k=6 Aflarea numerelor a, b, c	2 p 2 p 1 p 1 p 1 p
Sub. 2 pct a	(OM= bisectoarea <AOC$\Rightarrow m(\sphericalangle AOM)=m(\sphericalangle MOC)=x\Rightarrow m(\sphericalangle AOD)=90^\circ$ $x=\frac{4}{7}\cdot(90^\circ-2x)\Rightarrow x=24^\circ\Rightarrow m(\sphericalangle AOC)=48^\circ$	2 p 2 p
Sub. 2 pct b	$m(\sphericalangle AOM)=m(\sphericalangle NOB)=24^\circ\,(unghiuri\ opuse\ la\ varf)\Rightarrow m(\sphericalangle BOT)=66^\circ$ $m(\sphericalangle COT)=66^\circ$ $\sphericalangle COT\equiv\sphericalangle BOT\Rightarrow OT\ este\ bisectoarea\ unghiului$ COB	1 p 1 p 1 p
Sub. 3	**a)** $\frac{6}{606}<\frac{6}{n}<\frac{6}{600}$ rezultă pentru n valorile 605, 604, 603, 602,601 **b)** Fie k şi n numere naturale astfel încât $\frac{1}{101}<\frac{p}{n}<\frac{1}{100}$, deci $\frac{p}{101p}<\frac{p}{n}<\frac{p}{100p}$ penru fiecare p > 2 avem 101p>n>100p, deci n ia p-1 valori Pentru p cel mult egal cu 200 avem 1+2+3+…+199=199·200:2=19900	2 p 2 p 1 p 2 p

INSPECTORATUL ŞCOLAR AL JUDEŢULUI TULCEA
OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
- faza locală 22 februarie 2014 –

Clasa a VII-a

Subiectul 1. Fie numărul natural $A=\sqrt{\overline{0,a(b2)}+\overline{0,b(2a)}+\overline{0,2(ab)}}$, determinaţi perechile de cifre (a, b) cu a<b (Sub radical sunt fracţii zecimale periodice mixte).

Subiectul 2. Fie n număr natural nenul, p număr prim şi mulţimea:

$$\text{Ap}=\left\{\frac{p+2}{2},\frac{p+3}{3},\frac{p+4}{4},...,\frac{p+n}{n},...\right\}$$

a) care este ordinea elemenelor mulţimii în mulţimea Ap?
b) arătaţi că mulţimea Ap are un singur element număr natural.
c) Determinţi

Subiectul 3. Fie ABCD un paralelogram. Bisectoarea unghiului A intersectează diagonala BD în M, iar bisectoarea unghiului D intersectează diagonala AC în N. Demonstraţi că MN este paralelă cu AD.

Clasa a VIII-a

Subiectul 1.

In cubul ABCDEFGH, se notează cu M mijlocul muchiei [AB]

a) Demonstraţi că secţiunea determinată în cub de planul (HCM) este un trapez isoscel.
b) Arătaţi că aria acestui trapez este mai mare decât aria unei feţe a cubului

Subiectul 2.

a) Aflaţi valoarea minimă a numărului natural a pentru care expresia:
$E(x)=(x-1)(x+3)(x^2+2x+3)+a,$ este srtict pozitivă pentru orice număr real x.
b) Dacă $a,b\in R^*$ diferite şi $a^2+b^2=10ab$, calculaţi: $\frac{a+b}{a-b}$

Subiectul 3.

a) Arătaţi că: $\frac{1}{2}<\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\ldots+\frac{1}{24}<\frac{3}{2}$
b) Arătaţi că: $\frac{1}{3}<\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\frac{1}{4\cdot5}+\ldots+\frac{1}{29\cdot30}<\frac{1}{2}$

	BAREM CLASA a VII-a	
Sub. 1	Transformarea fracţiilor zecimale în fracţii ordinare Scrierea numerelor în baza 10 $A=\sqrt{\frac{a+b+2}{9}}$ este număr natural a+b+2<=20 , a+b+2 se divide cu 9 scrierea soluţiilor pentru a+b = 7, respectiv a+b = 16(mulţimea vidă),	1 p 1 p 1 p 2 p 1+1 p
Sub. 2	**a)** Comparăm 2 fracţii consecutive: $\frac{p+k}{k}$ şi $\frac{p+k+1}{k+1}$, p, k>=2 deducem că fracţiile sunt în ordine descrescătoare **b)** Elementele lui A se pot scrie $1+\frac{p}{k}$, cum p este număr prim rezultă k=p	3 p 2 p 2 p
Sub. 3	In ΔABD avem: $\frac{MB}{MD}=\frac{AB}{AD}$, iar în ΔDCA avem: $\frac{NC}{NA}=\frac{DC}{AD}$ (teorema bisectoarei). Deci: $\frac{MB}{MD}=\frac{NC}{NA}$, notand: BD=2a, AC=2b, OM=x si ON=y, O intersectia diagonalelor, relatia devine: $\frac{a+x}{a-x}=\frac{b+y}{b-y}$, de unde: $\frac{2x}{a-x}=\frac{2y}{b-y}$, sau $\frac{OM}{MD}=\frac{ON}{NA}$, cf. reciprocei th. Thales rezulta MN||AD.	2 p 1 p 1 p 2p 1 p

	BAREM CLASA a VIII-a	
Sub. 1	a) Fie {P}=CM∩AD şi {N}=PH∩AE. Planul (PCH) intersectează feţele ABFE şi DCGH ale cubului după dreptele MN şi CH paralele deci MNHC este trapez. Demonstraţia MC=NH b) Calculul ariei trapezului(in funcţie de a latura cubului) Aria unei feţe şi finalizarea	1 p 1 p 1 p 2 p 1+1 p
Sub. 2	a) $E(x)=(x^2+2x-3)\ )(x^2+2x+3)+a=(x^2+2x)^2-9+a$ Din condiţa E(x)>0 rezultă a-9>0 A număr natural, minim a=10 b) Din relaţia dată obţinem $(a+b)^2=12ab$ şi $(a-b)^2=8ab$, şi ab>0 deci $a+b=\sqrt{12ab}$, $a-b=\sqrt{8ab}$ finalizare	2p 1 p 1 p 1 p 1 p 1 p 1 p
Sub. 3	a) $\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\ldots+\frac{1}{24}<\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\ldots+\frac{1}{10}=\frac{15}{10}=\frac{3}{2}$ $\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\ldots+\frac{1}{24}>\frac{1}{24}+\frac{1}{24}+\frac{1}{24}+\ldots+\frac{1}{24}=\frac{15}{24}>\frac{12}{24}=\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{29\cdot 30}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{29}-\frac{1}{30}=\frac{1}{2}-\frac{1}{30}$ demonstrarea celor două inegalităţi	2 p 1 p 2 p 2 p