OLIMPIADA DE MATEMATICA
FAZA LOCALĂ

15.02.2014

Clasa a IV – a

1. (3p) a) Aflaţi valoarea lui „ x” din:

$$77 - (7 + x : 7) \times 7 = 7$$

(4p) b) Să se afle un număr știind că dacă îl împărțim la 8, câtului obținut îi adunăm 13, suma obținută o înmulțim cu 4, iar din produsul obținut scădem 25, obținem 55.

2. (7p) Scrie numărul 613 ca o sumă de trei termeni, astfel încât fiecare termen să fie cu 1 mai mare decat dublul numărului precedent.

3. (7p) Dacă $\overline{abb} - \overline{xx} = 1$, arătaţi că numărul $\overline{abx} + \overline{axa} + \overline{xab}$ se împarte exact la 55, iar numărul $\overline{aaa} - \overline{aab} + \overline{aax}$ este număr par.

4. Un șoricel are 10 grame, iar șoricuța are 6 grame.

(2p) a) Câte grame au împreună 13 șoricei și 12 șoricuțe?

(5p) b) Dați cel puțin trei exemple în care un grup format din țoricei și șoricuțe să cântărească exact 200 de grame

Notă : Toate subiectele sunt obligatorii,
Timp de lucru : 2 ore
Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 p.

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
OLIMPIADA DE MATEMATICA
FAZA LOCALĂ
15.02.2014
Clasa a IV – a

Subiectul 1. a) (3 puncte)

$77 - (7 + \boldsymbol{x} : 7) \times 7 = 7$
$(7 + \boldsymbol{x} : 7) \times 7 = 77 - 7$
$(7 + \boldsymbol{x} : 7) \times 7 = 70$ 1p
$7 + \boldsymbol{x} : 7 = 70 : 7$
$7 + \boldsymbol{x} : 7 = 10$
$\boldsymbol{x} : 7 = 10 - 7$
$\boldsymbol{x} : 7 = 3$ 1p
$\boldsymbol{x} = 21$ 1p

Subiectul 1. b) (4 puncte)

$(x : 8 + 13) \cdot 4 - 25 = 55$

$(x : 8 + 13) \cdot 4 = 55 + 25$

$(x : 8 + 13) \cdot 4 = 80$ *1p*

$x : 8 + 13 = 80 : 4$

$x : 8 + 13 = 20$ *1p*

$x : 8 = 20 - 13$

$x : 8 = 7$ *1p*

$x = 7 \cdot 8 = 56$

R: 56 .... *1p*

Subiectul 2. (7 puncte)

a + b + c = 613 .... 1p

b =2a +1 .... 1p c = 2b +1 .... 1p

a = 87 .... 2p

b = 175 .... 1p

c = 351 .... 1p

Subiectul 3. (7 puncte)

Din relatia data rezulta ca cele doua numere sunt consecutive, deci singura posibilitate este 100-99=1, ... 1p

ceea ce conduce la a=1, b=0 si x=9. .... 3p

$\overline{abx}+\overline{axa}+\overline{xab}$=1210 si 1210:55=22 .... 2p

$\overline{aaa}-\overline{aab}+\overline{aax}$=120 si este numar par.. 1p

Subiectul 4. a) (2 puncte)

13 x 10 + 12 x 6 = 202 grame 2p

Subiectul 4. b) (5 puncte)

a = numărul de șoricei
b = numărul de șoricuțe
10a + 6b = 200 ....1p
împărțind la 2 obținem 5a + 3b = 100 de unde avem b multiplul lui 5 .... 1p
pentru fiecare exemplu câte 1 punct

OLIMPIADA DE MATEMATICA
FAZA LOCALĂ

15.02.2014

Clasa a V – a

1. (5 p) a) Comparți numerele naturale a și b , știind că :

$$a = [(12^2 - 10^2): 11 - 1^{2014}]: 3 - 2014^0$$
$$b = [(3^4 - 2^{16}: 2^{11}): 7 - 2 \cdot 3]^{2014}.$$

(2p) b) Cu numerele a și b determinate la cerința a) , efectuați :

$$\overline{bbaa} - \overline{baba} + a^b - b^a \quad .$$

2. (4p) a) Aflați valoarea lui x din egalitatea :

$$(x + 1) + (x + 2) + (x + 3) + \cdots + (x + 50) = 2525$$

(3p) b) Câte numere naturale verifică relația :

$4 \cdot x + 17 < 100$?

3. Fie mulțimea $A = \{x \in \boldsymbol{N} \,|2^n < x \le 2^{n+1} , \ n \in \boldsymbol{N}\}$

(4 p) a) Câte elemente are mulțimea A în cazul $n = 2014$.

(3 p) b) Determinați numărul n pentru care mulțimea A are 128 elemente .

4. Se consideră numărul $N = \overline{ab60} + 25 \cdot \overline{ab}$.

(2 p) a) Arătați că N este divizibil cu 5 .

(2 p) b) Determinați restul împărțirii numărului $N \ la\ 25$.

(3 p) c) Dacă b este cifră pară , arătați că 2^N este pătrat perfect .

Notă : Toate subiectele sunt obligatorii,
Timp de lucru : 2 ore
Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 p.

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

OLIMPIADA DE MATEMATICA

FAZA LOCALĂ

15.02.2014

Clasa a V – a

1. a) a=[(144-100) : 11 - 1]: 3 = 1-1 = 0 (2 p)
   b=$[(81-32):\ 7-6]^{2014}$ =1 (2 p)
   a < b (1 p)

   b) $\overline{bbaa}-\overline{baba}+a^b-b^a=1100-1010+0^1-1^0=90-1=89$
   (2 p) .

2. a) $50x+(1+2+3+\cdots+50)=\ 2525$ (2 p)
   $50x=2525-50\cdot 51:2$
   $50x=2525-1275$ (1 p)
   $x=1250:50\ \Rightarrow\ \ x=25$ (1 p)

   b) $4x<100-17\Rightarrow x<20\frac{3}{4}\Rightarrow x\in\{0,1,2,3,\dots,20\}$ (2 p)
   21 numere natural verifică relația (1 p)

3. a) n=2014 $2^{2014}<x\le\ 2^{2015}$ (1 p)
   $\Rightarrow\ A=\{2^{2014}+1,2^{2014}+2,\dots,2^{2015}\}$
   Card A= $(2^{2015}-2^{2014})=2^{2014}$ (3 p)

   b) Card A=$(2^{n+1}-2^n)=2^n(2^1-1)=2^n$ (2 p)
   Dacă $2^n\ =128\Rightarrow 2^n\ =2^7\ , deci\ n=7$ (1 p)

4. a) $N=\overline{ab}\cdot 100+60+25\cdot\overline{ab}=125\overline{ab}+60=$
   $5\cdot\left(25\overline{ab}+12\right)\ \vdots\ 5$ (2 p)

   b) $N=125\overline{ab}+50+10=25\left(5\overline{ab}+2\right)+10$
   $10<25\ \Rightarrow$ restul împărțirii lui $N\ la\ 25\ este\ 10$ (2 p)

   c) b este cifră pară $\Rightarrow$ $5\overline{ab}$ este număr par $5\overline{ab}+2$ este par $\Rightarrow N\ par\ \Rightarrow$ există
   $k\in\mathbb{N}\ a.\hat{\imath}.\ \ N\ =2k$ (2 p)

   $2^N=2^{2k}=(2^k)^2$ - pătrat perfect (1 p)

OLIMPIADA DE MATEMATICA

FAZA LOCALĂ

15.02.2014

Clasa a VI – a

1. Calculați
   (4 p) a) $(2^{2013}+2^{2014}+2^{2015}):(2^{2014}-2^{2011})$
   (3 p) b) Media aritmetică a numerelor a și b , știind că
   $$a=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2014}$$
   $$b=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\cdots+\frac{2013}{2014}.$$
2. (3 p) a) Arătați că $a\cdot\overline{aaa}+b\cdot\overline{bbb}+c\cdot\overline{ccc}$ este divizibil cu 37.

   (4 p) b) Determinați $\overline{abc}$, știind că $a^2+b^2=c^2$ și a , b , c - distincte .

3. Pe o dreaptă se consideră punctele A_o , A_1 , A_2 , … , A_{10} , în această ordine , astfel încât A_1să fie mijlocul lui $[A_oA_2]$, A_2 mijlocul lui $[A_0A_3]$și așa mai departe , până la A_9 mijlocul lui $[A_0A_{10}]$. Știind că A_0A_1= 2 cm , determinați :

   (3 p) a) lungimea segmentului A_9A_{10} ;

   (4 p) b) lungimea laturii triunghiului echilateral care s-ar putea confecționa dintr-o buclă de sârmă cu lungimea egală cu $(A_0A_{10}-1)\ cm$.
4. (7 p) Fie unghiurile $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$ neadiacente suplementare , astfel încât $m(\sphericalangle BOC)=\frac{3}{5}$ din $m(\sphericalangle AOB)$. Dacă D este simetricul punctului A față de O și E un punct astfel încât $(OB$ este bisectoarea $\sphericalangle EOC$, arătați că E se află pe dreapta AD.

Notă : Toate subiectele sunt obligatorii,

Timp de lucru : 2 ore

Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 p.

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

OLIMPIADA DE MATEMATICA

FAZA LOCALĂ

15.02.2014

Clasa a VI – a

1. a) $[2^{2013}\cdot(1+2^1+2^2)]:[2^{2011}\cdot(2^3-1)]=(2^{2013}\cdot 7):(2^{2011}\cdot 7)$ (3 p)
Finalizare$(2^{2013}\cdot 7):(2^{2011}\cdot 7)=2^2=4$(1 p)

b) $a+b=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2014}+\frac{2013}{2014}\right)=1\cdot 2013=2013$
$m_a=\frac{a+b}{2}=2013:2=1006{,}5$ (3 p)

2. a) $a\cdot 111\cdot a+b\cdot 111\cdot b+c\cdot 111\cdot c=111\cdot(a^2+b^2+c^2)=3\cdot 37\cdot(a^2+b^2+$ $c2$rezultă că numărul reste divizibil cu 37 . (3 p)
b)$a^2+b^2=c^2$și a , b , c cifre , $a\neq 0$, $a\neq b$, $a\neq c$, $b\neq c$.
Dacă$a=1$, $b=0$ $\Rightarrow c=1$ $\Rightarrow$numărul101 - NU
Dacă$a=3$, $b=4$ $\Rightarrow c=5$ $\Rightarrow$numărul345 - DA
Dacă$a=2$ $\Rightarrow 4+b^2=c^2$ $\Rightarrow c^2-b^2=4$ (3 p)
Pătratele perfecte ale cifrelor de la 1 la 9 sunt$\{1,4,9,16,25,36,49,64,81\}$și nu există două pătrate perfecte a căror diferență să fie $4,9,16,25,36,49,64$ sau 81
Singurele soluții sunt 345 și 435 . (3 p)

3. a) $A_0A_1=A_1A_2$ = 2 cm $\Rightarrow A_0A_2=2\cdot 2cm=4\,cm$
$A_2A_3=A_0A_2=4\,cm \Rightarrow A_0A_3=2\cdot 4\,cm=8\,cm=2^3\,cm$

$A_3A_4=A_0A_3=8\,cm \Rightarrow A_0A_4=2\cdot 8\,cm=16\,cm=2^4\,cm\Rightarrow A_4A_5=2^4\,cm$

$\Rightarrow\cdots A_9A_{10}=2^9\,cm$ (3 p)

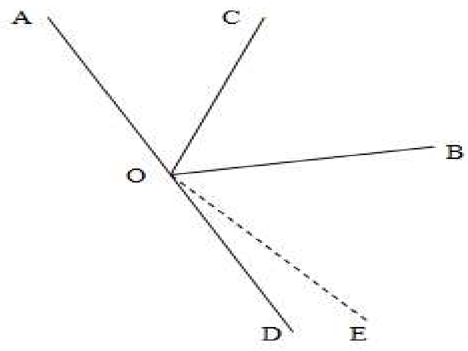
b) $A_0A_{10}=A_0A_1+A_1A_2+A_2A_3+\cdots+A_9A_{10}=2+2+2^2+2^3+\cdots+2^9=$

$2^2+2^2+2^3+\cdots+2^9=2^3+2^3+\cdots+2^9=2^9+2^9=2^{10}$ (2 p)

$A_0A_{10}-1=2^{10}-1=1024-1=1023\ \vdots 3$ (1 p)

lungimealaturiitriunghiuluiechilateraleste1023:3 $=341\,cm$ (1 p)

4. Desen (1 p)



$$m(\sphericalangle AOB) + m(\sphericalangle BOC) = 180^o \Rightarrow m(\sphericalangle AOB) + \frac{3}{5} m(\sphericalangle AOB) = 180^o \Rightarrow$$

$$\frac{8}{5} m(\sphericalangle AOB) = 180^o \Rightarrow m(\sphericalangle AOB) = 112^o 30'$$

$m(\sphericalangle AOB) = 112^o 30' \Rightarrow m(\sphericalangle BOC) = 67^o 30'$ (2 p)

$(OB$ $bisectoarea \sphericalangle EOC \Rightarrow m(\sphericalangle COB) = m(\sphericalangle BOE) = 67^o 30'$ (1 p)

A si D simetrice față de O $\Rightarrow m(\sphericalangle AOD) = 180^o \Rightarrow m(\sphericalangle BOD) = 180^o - m(\sphericalangle AOB) = 180^o - 112^o 30' = 67^o 30'$ (2 p)

Dar $m(\sphericalangle BOE) = 67^o 30'$, deci $m(\sphericalangle BOD) = m(\sphericalangle BOE)$ iar $(OD$ $și$ $(OE$ sunt în același semiplan față de $(OB$ (1p)

OLIMPIADA DE MATEMATICA
FAZA LOCALĂ

15.02.2014

Clasa a VII – a

1. (3 p) a) Arătați că : $\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$, pentru orice număr natural n .

   (4 p) b) Stabiliți dacă numărul a este rațional , unde :

$$a = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{4}}{\sqrt{20}} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{5}}{\sqrt{30}} + \frac{\sqrt{7}-\sqrt{6}}{\sqrt{42}} + \ldots + \frac{\sqrt{100}-\sqrt{99}}{\sqrt{9900}}.$$

2. (7 p) Să se determine două numere naturale a căror sumă este 29 , știind că unul are 2 divizori , celălalt exact 5 divizori , iar suma tuturor divizorilor (celor 7) este 45 .

3. Fie paralelogramul $ABCD$ cu $DB \perp BC$. Prin punctul C se duce o perpendiculară pe DC, care intersectează diagonala BD în E .

   (4 p) a) Demonstrați că $\sphericalangle BEC \equiv \sphericalangle DAB$.

   (3 p) b) Dacă $m(\sphericalangle A) = 60^o$, arătați că $\frac{BE}{EC} = \frac{CB}{BA}$.

4. (7 p) În pătratul $ABCD$ se consideră M și N mijloacele laturilor $[AD]$ și $[DC]$. Fie $P \in (MB$ astfel încât $MB = BP$. Dacă $BD = 8\ cm$, aflați distanța de la B la NP

Notă : Toate subiectele sunt obligatorii,
Timp de lucru : 3 ore
Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 p.

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
OLIMPIADA DE MATEMATICA
FAZA LOCALĂ
15.02.2014
Clasa a VII – a

1. a) $\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}}=\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}}-\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}}=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$,$\forall\, n\in\mathbb{N}^*$ (3 p)

   b) $a=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{20}}-\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{20}}+\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{30}}-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{30}}+\cdots+\frac{\sqrt{100}}{\sqrt{9900}}-\frac{\sqrt{99}}{\sqrt{9900}}$

   $a=\frac{1}{\sqrt{4}}-\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{6}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{99}}-\frac{1}{\sqrt{100}}$ (2 p)

   $a=\frac{1}{2}-\frac{1}{10}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}\in\mathbb{Q}$ (2 p)

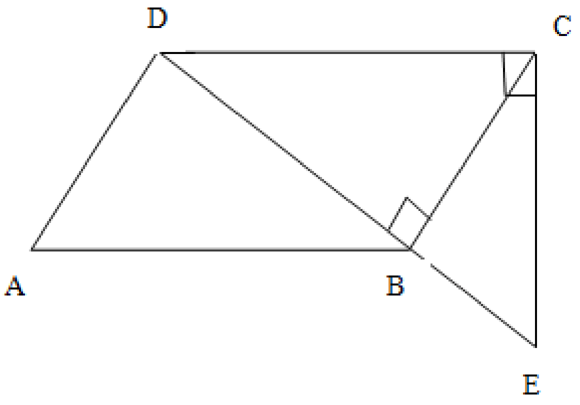
2. a) Fie a , b astfel încât $a+b=29$. Cum a are 2 divizori , rezultă că $a=p$, unde p număr prim şi $\mathcal{D}_a=\{1,p\}$ (2 p)

   Numărul b are 5 divizori $\Longrightarrow b=q^4$, unde q este număr prim iar $\mathcal{D}_b=\{1,q^1,q^2,q^3,q^4\}$ (2 p)

   Suma divizorilor este $1+p+1+q+q^2+q^3+q^4=2+(p+q^4)+q^1+q^2+q^3=2+(a+b)+q^1+q^2+q^3=45\Longrightarrow q^1+q^2+q^3=45-31=14$. Rezultă $q(1+$ $q1+q2=14 \Rightarrow q14 \Rightarrow q\in 2,7$ (2 p)

   Soluția este $q=2$, deci $b=2^4=16\Longrightarrow a=29-16=13$ (1 p)

3.



(1 p)

(1 p)

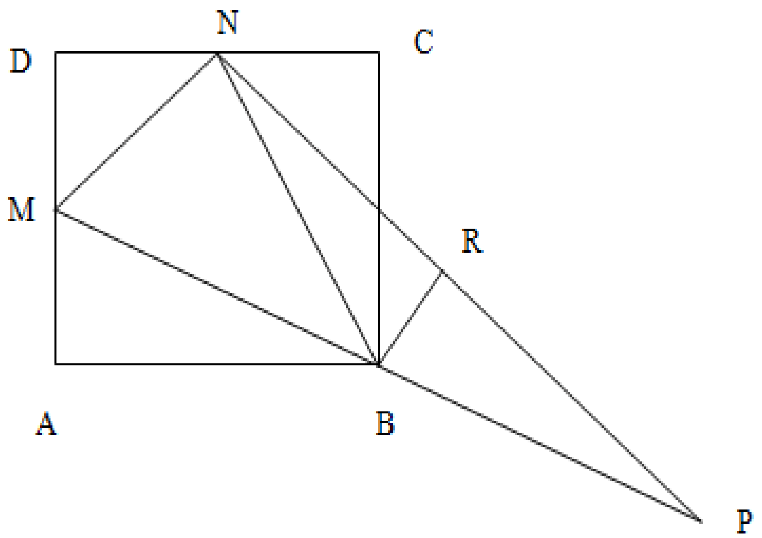
a) $ABCD$ paralelogram $\Longrightarrow m(\sphericalangle ABC)+m(\sphericalangle BCD)=180^o$.

Notăm $m(\sphericalangle ABD) = x$ și $m(\sphericalangle BCD) = y \Longrightarrow x + 90^o + y = 180^o \Longrightarrow$
$x + y = 90^o$. $m(\sphericalangle BCE) = 90^o - y = x^o$ (2 p)
În ΔBCE , $(\sphericalangle B) = 90^o$, $m(\sphericalangle BEC) = y$ și cum $m(\sphericalangle DAB) = m(\sphericalangle BCD) \Longrightarrow$
$m(\sphericalangle BEC) = m(\sphericalangle DAB)$ (1 p)
b) $m(\sphericalangle A) = 60^o \Longrightarrow m(\sphericalangle ABD) = 30^o \Longrightarrow \Delta BEC$ dreptunghic în B (1 p)

$m(\sphericalangle BCE) = 30^o \Longrightarrow BE = \frac{CE}{2} \Longrightarrow \frac{BE}{CE} = \frac{1}{2}$.
În ΔBCD $m(\sphericalangle B) = 90^o$, $m(\sphericalangle BDC) = 30^o \Longrightarrow BC = \frac{DC}{2} \Longrightarrow \frac{BC}{DC} = \frac{1}{2}$ (1 p)

$[DC] = [BA]$, rezultă $\frac{BE}{EC} = \frac{BC}{BA}$ (1 p)

4.



(1 p)

$\Delta MAB \equiv \Delta NCB \Longrightarrow \left| \begin{matrix} BM = BN \\ BN = BP \end{matrix} \right. \Longrightarrow NB = \frac{MP}{2}$ (2 p)

ΔMNP *dreptunghic* $(\hat{N} = 90^0) \Longrightarrow MN \perp NP$, $BR \perp NP \Longrightarrow MN \| BR$ (2 p)

B mijlocul lui MP , deci BR este linie mijlocie în $\Delta MNP \Longrightarrow BR = \frac{MN}{2} = \frac{AC}{4} = 2$ cm

(2 p)

OLIMPIADA DE MATEMATICA

FAZA LOCALĂ

15.02.2014

Clasa a VIII – a

1. (4 p) a) Calculați $\left[(2+\sqrt{3})^{2014}+\frac{1}{(2-\sqrt{3})^{2014}}\right]\cdot\frac{(4-2\cdot\sqrt{3})^{2014}}{2^{2013}}$

   (3 p) b) Determinați numerele raționale $a \text{ și } b$ astfel încât

   $$2a\sqrt{2}-b=a+b\sqrt{2}-3 \ .$$

2. (4 p) a) Rezolvați ecuația $|x-1|+|x-2|+\cdots+|x-2013|=2014(x-2014)$.

   (3 p) b) Arătați că $x\sqrt{x}+y\sqrt{y}\geq x\sqrt{y}+y\sqrt{x}$, $\forall\ x,y\in\mathbb{R}_+$

3. (7 p) În cubul $ABCDA'B'C'D'$, M este mijlocul laturii AB , $C'M\cap D'B=\{P\}$. Dacă $BP=4\sqrt{3}$, aflaţi distanţa de la punctul D la diagonala $D'B$.

4. În tetraedrul regulat $ABCD$ se consideră punctul M - mijlocul lui $[AB]$ şi N - mijlocul lui $[AC]$. Dacă muchia tetraedrului este de 8 cm. , determinaţi :

   (3 p) a) Perimetrul patrulaterului BCNM

   (2 p) b) măsura unghiului format de dreapta MN cu AB

   (2 p) c) distanţa de la punctul C la planul (ABD) .

Notă : Toate subiectele sunt obligatorii,
Timp de lucru : 3 ore
Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 p.

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
OLIMPIADA DE MATEMATICA
FAZA LOCALĂ
15.02.2014
Clasa a VIII – a

1. a) $\frac{(2+\sqrt{3})^{2014}\cdot(2-\sqrt{3})^{2014}+1}{(2-\sqrt{3})^{2014}}\cdot\frac{(4-2\sqrt{3})^{2014}}{2^{2013}}=\frac{\left(2^2-\sqrt{3}^2\right)^{2014}+1}{(2-\sqrt{3})^{2014}}\cdot\frac{2^{2014}(2-\sqrt{3})^{2014}}{2^{2013}}=$

$(1^{2014}+1)\cdot 2=4$ (4 p)

b) $(2a-b)\sqrt{2}=a+b-3$

$(2a-b)\sqrt{2}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\ \ iar\ \ a+b-3\in\mathbb{Q}\Rightarrow$

$\begin{cases}2a-b=0\\ a+b-3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\ b=2\end{cases}$ (3 p)

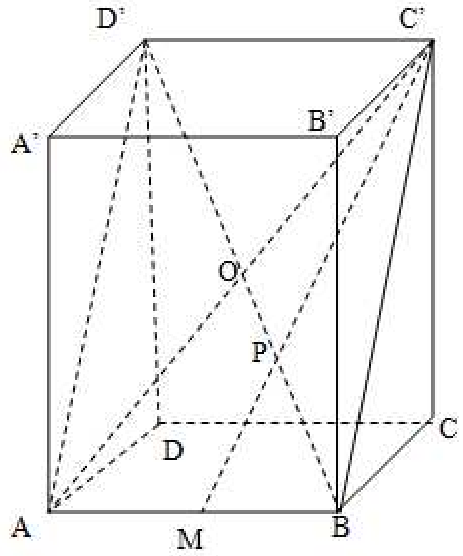
2. a) Membrul stâng este pozitiv $\Rightarrow$ membrul drept este pozitiv , deci $x-2014\geq 0\Rightarrow x\geq 2014\Rightarrow x-1\geq 0, x-2\geq 0,\dots,x-2013\geq 0\Rightarrow$ renuntând la module se obține $x-1+x-2+\cdots+x-2013=2014\cdot(x-2014)\Leftrightarrow 2013x-(1+2+3+\cdots+2013)=2014x-2014^2\Leftrightarrow 2013x-\frac{2013\cdot2014}{2}=2014x-2014^2\Leftrightarrow x=2014^2-\frac{2013\cdot2014}{2}\Leftrightarrow x=\frac{2\cdot2014^2-2013\cdot2014}{2}=1007\cdot 2015$ (4 p)

b) $x\sqrt{x}+y\sqrt{y}-x\sqrt{y}-y\sqrt{x}=x(\sqrt{x}-\sqrt{y})-y(\sqrt{x}-\sqrt{y})=$

$(\sqrt{x}-\sqrt{y})(x-y)=(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})=$

$(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2(\sqrt{x}+\sqrt{y})\geq 0\ pentru\ orice\ x,y\in\mathbb{R}_+$ (3 p)

3. Desen



(1 p)

Unind $C' \, cu \, A \Longrightarrow C'A$ diagonală în dreptunghiul $ABC'D'$, cu $AC' \cap BD' = \{O\}$.

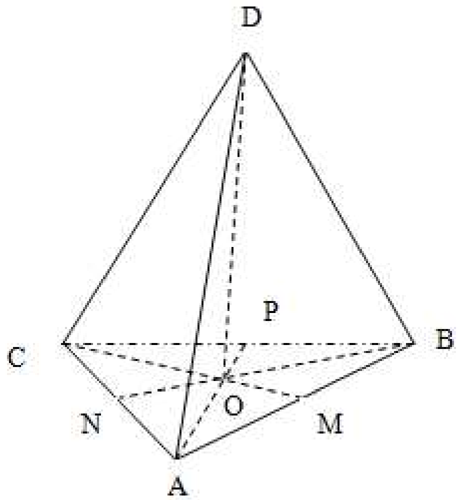
În triunghiul ABC' , $C'M \cap BO = \{P\}$ (2 p)

P este centrul de greutate $\Longrightarrow BP = \frac{2}{3}BO \Longrightarrow \frac{2}{3}\frac{l\sqrt{3}}{2} = BP \Longrightarrow l = \frac{3 \cdot 4\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

$\Longrightarrow l = 12$ (muchia cubului) (2 p)

În triunghiul $D'DB \; cu \; m(\sphericalangle D) = 90^o$ notăm $(D, BD') = DE$, $DE = \frac{DD' \cdot DB}{D'B} =$
$4\sqrt{6} \, cm$ (2 p)

4. Desen



(1 p)

a) $\Delta ABC \, , MN - linie \; mijlocie \Longrightarrow MN \parallel BC \; , MN = \frac{BC}{2} = 4 \, cm$
$BCNM - trapez \; isoscel \;\; P_{BCNM} = BC + CN + NM + MB = 8 \, cm + 3 \cdot 4 \, cm =$
$20 \, cm$ (2 p)

b) $MN \parallel BC \; , AB \; secantă \;\; m(\sphericalangle(MN, AB)) = 60^0$

Fie P mijl. lui $[BC] \Rightarrow AP \perp BC$

Cum $DO \perp (ABC) \Rightarrow DO \perp BC$, rezultă $\begin{cases} BC \perp (DPO) \\ AD \subset (DPO) \end{cases} \Rightarrow BC \perp AD.$

Din $MN \parallel BC$ și $AD \perp MN \Rightarrow m(\sphericalangle(MN, AD)) = 90^o$

c) $\begin{cases} AB \perp CM \\ AB \perp DM \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AB \perp (CMD) \\ AB \subset (ABD) \end{cases} \Rightarrow (ABD) \perp (CDM)$

Construim $CE \perp DM$, $CE \subset (CDM) \Rightarrow CE \perp (ADB) \Rightarrow d(C, (ABD)) = CE$

În ΔCDM , $DM = \frac{l\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$

Se aplică teorema lui Pitagora și se obține $DO = \frac{8\sqrt{6}}{3}$

$$A_{\Delta CDM} = \frac{CM \cdot DO}{2} = 16\sqrt{2}$$

$A_{\Delta CDM} = \frac{DM \cdot CE}{2} = \frac{4\sqrt{3} \cdot CE}{2} = 2\sqrt{3} \cdot CE$. Se obține $CE = \frac{8\sqrt{6}}{3}$ $d(C, (ABD)) = \frac{8\sqrt{6}}{3}$ cm

(2 p)