

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Județeană și a Municipiului București, 13 Martie 2010

CLASA a VIII-a

Problema 1.

- (i) Arătați că nu putem pune în vârfurile unui cub 8 numere distincte din mulțimea $\{0, 1, 2, 3, \dots, 11, 12\}$ astfel încât suma numerelor din oricare două vârfuri unite printr-o muchie a cubului să fie divizibilă cu 2.
- (ii) Arătați că putem pune în vârfurile unui cub 8 numere distincte din mulțimea $\{0, 1, 2, 3, \dots, 11, 12\}$ astfel încât suma numerelor din oricare două vârfuri unite printr-o muchie a cubului să fie divizibilă cu 3.

Gazeta Matematică

Problema 2. Fie x, y două numere naturale nenule diferite. Arătați că numărul $\frac{(x+y)^2}{x^3 + xy^2 - x^2y - y^3}$ nu este întreg.

Problema 3. Se consideră cubul $ABCD A' B' C' D'$. Bisectoarele unghiurilor $\angle A' C' A$ și $\angle A' A C'$ intersecționează AA' și $A' C'$ în punctele P , respectiv S . Punctul M este piciorul perpendicularei din A' pe $C' P$ iar N este piciorul perpendicularei din A' pe AS . Punctul O este centrul feței $ABB' A'$.

- (i) Demonstrați că planele (MNO) și $(AC' B)$ sunt paralele.
- (ii) Calculați distanța dintre planele (MNO) și $(AC' B)$ știind că $AB = 1$.

Problema 4. Determinați perechile de numerele naturale (a, b) care verifică egalitatea $a + 2b - b^2 = \sqrt{2a + a^2 + |2a + 1 - 2b|}$.

*Timp de lucru 3 ore. Se acordă în plus 30 de minute pentru întrebări.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.*

Olimpiada Națională de Matematică

Etape Județeană și a Municipiului București, 13 Martie 2010

**CLASA A VIII-A
SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE**

Problema 1.

- (i) Arătați că nu putem pune în vârfurile unui cub 8 numere distincte din mulțimea $\{0, 1, 2, 3, \dots, 11, 12\}$ astfel încât suma numerelor din oricare două vârfuri unite printr-o muchie a cubului să fie divizibilă cu 2.
- (ii) Arătați că putem pune în vârfurile unui cub 8 numere distincte din mulțimea $\{0, 1, 2, 3, \dots, 11, 12\}$ astfel încât suma numerelor din oricare două vârfuri unite printr-o muchie a cubului să fie divizibilă cu 3.

Gazeta Matematică

Soluție.

(i) Dacă într-un vârf scriem un număr din mulțimea dată, atunci în cele trei vârfuri adiacente trebuie să scriem numere de aceeași paritate.

..... **2 puncte**

Rezultă că în toate cele opt vârfuri trebuie scrise numere de aceeași paritate.

..... **1 punct**

Cum în mulțimea dată sunt 7 numere pare și 6 impare, cerința ca suma numerelor din oricare două vârfuri unite printr-o muchie a cubului să fie divizibilă cu 2 nu poate fi îndeplinită.

..... **1 punct**

(ii) Sunt 8 numere în mulțimea dată care nu se divid la 3, anume 1, 4, 7, 10, (care dau restul 1, și) 2, 5, 8, 11 (care dau restul 2).

..... **1 punct**

În vârfuri ce nu sunt capete ale unei muchii scriem numere cu resturi egale la împărțirea cu 3.

..... **1 punct**

Un exemplu: vârfurilor cubului $ABCD A' B' C' D'$ le asociem numerele 1, 2, 4, 5, 8, 7, 11, respectiv 10.

..... **1 punct**

Problema 2. Fie x, y două numere naturale nenule diferite. Arătați că numărul $\frac{(x+y)^2}{x^3+xy^2-x^2y-y^3}$ nu este întreg.

Soluție. Avem $\frac{(x+y)^2}{x^3+xy^2-x^2y-y^3} = \frac{(x+y)^2}{(x-y)(x^2+y^2)}$.

..... **1 punct**

Presupunem că numărul $\frac{(x+y)^2}{(x-y)(x^2+y^2)}$ este întreg. Atunci și numărul $\frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}$ este întreg.

..... **2 puncte**
 Avem $\frac{(x+y)^2}{x^2+y^2} = 1 + \frac{2xy}{x^2+y^2}$, deci $\frac{2xy}{x^2+y^2}$ este număr întreg.

..... **2 puncte**
 Însă $x^2 + y^2 > 2xy$, echivalent cu $(x-y)^2 > 0$, deoarece $x \neq y$.

..... **1 punct**
 Rezultă $0 < \frac{2xy}{x^2+y^2} < 1$, contradicție.
 **1 punct**

Problema 3. Se consideră cubul $ABCD A'B'C'D'$. Bisectoarele unghiurilor $\angle A'C'A$ și $\angle A'AC'$ intersectează AA' și $A'C'$ în punctele P , respectiv S . Punctul M este piciorul perpendicularei din A' pe $C'P$ iar N este piciorul perpendicularei din A' pe AS . Punctul O este centrul feței $ABB'A'$.

- (i) Demonstrați că planele (MNO) și $(AC'B)$ sunt paralele.
 (ii) Calculați distanța dintre planele (MNO) și $(AC'B)$ știind că $AB = 1$.

Soluție.

(i) Notăm cu T și R intersecțiile dreptei AC' cu $A'M$ și $A'N$ respectiv. În triunghiul $A'C'T$, $C'M$ este bisectoare și înălțime, deci $A'M = MT$.
 **1 punct**

În triunghiul $A'AR$, AN este bisectoare și înălțime, deci $A'N = NR$.
 **1 punct**

Segmentul MO este linie mijlocie în triunghiul $A'TB$, deci $MO \parallel TB$, iar segmentul NO este linie mijlocie în triunghiul $A'RB$, de unde $NO \parallel RB$. Cum $(TRB) = (AC'B)$, rezultă cerința. **2 puncte**

(ii) Distanța dintre cele două plane este egală cu distanța de la O la planul $(AC'B)$ **1 punct**

Distanța de la O la planul $(AC'B)$ este egală cu jumătatea distanței de la punctul A' la plan. **1 punct**

Distanța de la A' la plan este jumătate din $A'D$, adică $\frac{\sqrt{2}}{2}$, deci distanța dintre plane este $\frac{\sqrt{2}}{4}$. **1 punct**

Problema 4. Determinați perechile de numerele naturale (a, b) care verifică egalitatea $a + 2b - b^2 = \sqrt{2a + a^2} + |2a + 1 - 2b|$.

Soluție. Deoarece $2a + 1$ și $2b$ sunt numere de parități diferite, avem că $|2a + 1 - 2b| \neq 0$, deci $|2a + 1 - 2b| \geq 1$. **1 punct**

Rezultă că $\sqrt{2a + a^2} + |2a + 1 - 2b| \geq \sqrt{2a + a^2 + 1} = a + 1$. **1 punct**

Pe de altă parte, avem $a + 2b - b^2 = a + 1 - (b - 1)^2 \leq a + 1$. **2 puncte**

Egalitatea din enunț este posibilă dacă și numai dacă $a + 2b - b^2 = a + 1 = \sqrt{2a + a^2} + |2a + 1 - 2b|$. Din prima egalitate obținem $b = 1$, **1 punct**

iar din a doua egalitate obținem $|2a + 1 - 2b| = 1$. De aici $1 = |2a - 1|$, adică $a = 0$ sau $a = 1$. Perechile (a, b) căutate sunt deci $(0, 1)$ și $(1, 1)$.

..... **2 puncte**