ISTORIE, EDUCAȚIE, PERFORMANȚA

Concursul Interjudeţean de Matematică

„Ion Ciolac”

Ediţia a XVI-a, 3 aprilie 2016

Clasa a VII-a

<u>Problema 1</u>

Fie numărul real

$$A=\frac{1}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}+\frac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{6}}}+\frac{1}{\sqrt{7+2\sqrt{12}}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{4031+2\sqrt{2015\cdot 2016}}}$$

Determinaţi $n\in\mathbb{N}^*$ astfel ca fracţia

$$\frac{2\sqrt{n}-\frac{A+1}{6}}{2\sqrt{n}+\frac{A+1}{6}}\in\mathbb{Q}$$

***

<u>Problema 2</u>

Fie numerele:

$$a=\sqrt{2^{2016}-2^{1009}+2^{1010}+1} \quad \text{şi}$$
$$b=\sqrt{2^{2016}+2^{1009}-2^{1010}+1}$$

a) Demonstraţi că numerele a şi b sunt numere naturale impare consecutive.

b) Comparaţi $(5a-3b)$ cu $\sqrt{5}^{864}$

***

<u>Problema 3</u>

In patrulaterul convex $ABCD$ se construieşte mediatoarea lui $[BC]$ care intersectează pe $[AD]$ în M. Dacă $m(\sphericalangle BMC)=60°, MB \parallel CD$ $și$ $CM \parallel AB$ să se determine măsura unghiului ascuţit format de diagonalele patrulaterului.

Dan Nedeianu,Drobeta Turnu-Severin, Gazeta Matematică

<u>Notă:</u> *Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul de lucru este 2 ore. Fiecare subiect se notează de la 0 puncte la 7 puncte.*

Succes!

Concursul Interjudeţean de Matematică

„Ion Ciolac”

Ediţia a XVI-a, 3 aprilie 2016

Soluţii şi barem de corectare clasa a VII-a

Problema 1

$A=\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2016}+\sqrt{2015}}$ **3p**

$A=\sqrt{2}-\sqrt{1}+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{4}-\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{2016}-\sqrt{2015}=\sqrt{2016}-1=12\sqrt{14}-1$

$\Rightarrow A+1=12\sqrt{14}$ **1p**

$\frac{2\sqrt{n}-2\sqrt{14}}{2\sqrt{n}+2\sqrt{14}}=\frac{\sqrt{n}-\sqrt{14}}{\sqrt{n}+\sqrt{14}}=\frac{(\sqrt{n}-\sqrt{14})^2}{n-14}=\frac{n+14-2\sqrt{14n}}{n-14}$ **1p**

$\frac{n+14-2\sqrt{14n}}{n-14}\in\mathbb{Q}$ dacă $n=14k^2, k\in\mathbb{Z}^*\setminus\{-1,1\}$ **1p**

Dacă k$=\pm1\Rightarrow n=14\Rightarrow$ fracţia e zero deci şi aceste valori sunt acceptate **1p**

Problema 2

a) $a=\sqrt{2^{2016}-2^{1009}+2\cdot2^{1009}+1}=\sqrt{2^{2016}+2^{1009}+1}=\sqrt{(2^{1008})^2+2\cdot2^{1008}+1}=$

$=\sqrt{(2^{1008}+1)^2}=|2^{1008}+1|=2^{1008}+1\in\mathbb{N}$ **2p**

$b=\sqrt{2^{2016}+2^{1009}-2\cdot2^{1009}+1}=\sqrt{2^{2016}-2^{1009}+1}=\sqrt{(2^{1008})^2-2\cdot2^{1008}+1}=$

$=\sqrt{(2^{1008}-1)^2}=|2^{1008}-1|=2^{1008}-1\in\mathbb{N}$ **2p**

a şi b sunt impare şi $a-b=2\Rightarrow a$ şi b sunt impare consecutive **1p**

b) $5a-3b=5(2^{1008}+1)-3(2^{1008}-1)=2\cdot2^{1008}+8=2\cdot(2^7)^{144}+8=2\cdot128^{144}+8$ **1p**

$\sqrt{5}^{864}=\left(\sqrt{5}^6\right)^{144}=125^{144}\Rightarrow5a-3b>\sqrt{5}^{864}$ **1p**

Problema 3

$M\in mediatoarei\ [BC]\ și\ m(\widehat{BMC})=60°\Rightarrow\Delta MBC\ este\ echilateral$ **1p**

$MB\parallel CD\ și\ CM\parallel AB\Rightarrow m(\widehat{ABM})=m(\widehat{BMC})=m(\widehat{MCD})=60°$(unghiuri alterne interne)........... **1p**

$m(\widehat{AMB})=m(\widehat{MDC})$ unghiuri corespondente **0,5p**

Atunci $\Delta AMB\sim\Delta MDC$ (U.U.).. **0,5p**

$\Rightarrow\frac{MB}{CD}=\frac{AB}{MC}\ Dar\ MB=MC=BC\Rightarrow\frac{BC}{CD}=\frac{AB}{BC}(1)$ **1p**

Relaţia (1) şi $m(\widehat{ABC})=m(\widehat{BCD})=120°\Rightarrow\Delta ABC\sim\Delta BCD$ **1p**

Adică $m(\widehat{CAB})=m(\widehat{DBC});\ AB\parallel MC\Rightarrow m(\widehat{CAB})=m(\widehat{MCA})\ deci\ m(\widehat{DBC})=m(\widehat{MCA})$.......... **1p**

Fie $AC\cap BD=\{O\}\Rightarrow m(\widehat{MCO})=m(\widehat{OBC})$;

$m(\widehat{MCO})+m(\widehat{OCB})=60°\Rightarrow m(\widehat{OBC})+m(\widehat{OCB})=60°$

Deci $m(\widehat{AOB})=60°$ unghi exterior pt. ΔOBC **1p**