CLASA A VII-A
SUBIECTE

SUBIECTUL 1.

1. $(6\ p)$ Dacă $A-B-C-D$ sunt puncte coliniare în această ordine, să se demonstreze egalitatea:

$$AC^2\cdot BD+CD^2\cdot AB-BC^2\cdot AD=AB\cdot BD\cdot AD.$$

2. $(7\ p)$ Explicaţi de ce ecuaţia $\sqrt{x+220}+\sqrt{x+2016}=40$ nu are soluţie reală.
3. $(7\ p)$ Un număr de $2\cdot n$ bomboane au fost împărţite la 13 fete şi n băieţi, în mod egal. Câţi băieţi au primit bomboane ?

SUBIECTUL 2.

1. $(8\ p)$ Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia:

$$\sqrt{6x^2+\sqrt{6x^4+\sqrt{6x^8+\sqrt{6x^{16}+\sqrt{9x^{32}}}}}}=2016.$$

2. $(12\ p)$ Fie numerele întregi a, b şi c astfel încât $E=a\cdot b\cdot c+a\cdot b+b\cdot c+a\cdot c+a+b+c+7$ să fie număr întreg. Demonstraţi că a, b, c nu pot fi numere consecutive.

SUBIECTUL 3.

1. Un pirat porneşte din punctul A, merge $3\,km$ spre sud, apoi $6\,km$ spre est, apoi $8\,km$ spre sud, apoi $2\,km$ spre est şi în fine, $5\,km$ spre nord şi ajunge la punctul B, unde era ascunsă comoara.
   - **a)** $(4\ p)$ Care este distanţa în linie dreaptă între cele două puncte A şi B ?
   - **b)** $(4\ p)$ Arătaţi că niciunul dintre punctele în care îşi schimbă direcţia nu se află pe dreapta AB.
2. Se consideră triunghiul isoscel $\triangle ABC$ de bază $[BC]$ cu $m(\sphericalangle BAC)=36^0$. Fie punctul $D\in(AC)$ astfel încât semidreapta $(BD$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle ABC$. Demonstraţi că :
   - **a)** $(4\ p)$ triunghiurile $\triangle ABC$ şi $\triangle BDC$ sunt asemenea ;
   - **b)** $(4p)$ are loc $BC^2=AC\cdot DC$;
   - **c)** $(4\ p)$ $BC\cdot(BC+AC)=AC^2$.

NOTĂ:
- Fiecare subiect se punctează de la 0-20 puncte. Toate subiectele sunt obligatorii.
- Durata probei este de 120 minute din momentul în care s-a terminat distribuirea subiectelor către elevi.
- Elevul are dreptul să rezolve subiectele în orice ordine doreşte.

CLASA A VII-A
BAREM

SUBIECTUL 1.

1. Notăm $AB = x$; $BC = y$; $CD = z \Rightarrow AC = x + y$; $BD = y + z$; $AD = x + y + z$ **3p**
   $AC^2 \cdot BD = \left(x^2 + 2xy + y^2\right)\cdot\left(y + z\right) = x^2y + 2xy^2 + y^3 + x^2z + 2xyz + y^2z$ **1p**
   Membrul stâng şi cel drept $= x^2y + xy^2 + 2xyz + x^2z + xz^2$ **2p**
2. Presupunem prin absurd că ecuaţia are soluţia $x_0 \in \mathbb{R}$ **1p**
   Condiţia de existenţă: $x \geq -220$ conduce la $x + 2016 \geq 1796$ **2p**
   Observaţia că $\sqrt{x+220} + \sqrt{x+2016} \geq 0 + \sqrt{1796}$ **1p**
   $\Rightarrow 40 \geq \sqrt{1796}$ **1p**
   $1600 \geq 1796$, absurd **1p**
   Finalizarea 1p
3. Notăm cu x numărul de bomboane primite de fiecare copil $\Rightarrow x \in \mathbb{N}^*$.
   Rezultă că $2n = 13x + nx \Rightarrow 2n = x\left(13 + n\right) \Rightarrow x = \dfrac{2n}{n+13} \in \mathbb{N}$ **2p**
   Scrierea $x = 2 - \dfrac{26}{n+13}$ **2p**
   $\Rightarrow n + 13 \in \left\{1; 2; 13; 26\right\} \Rightarrow n \in \left\{-12; -11; 0; 13\right\}$ **2p**
   Finalizare 1p

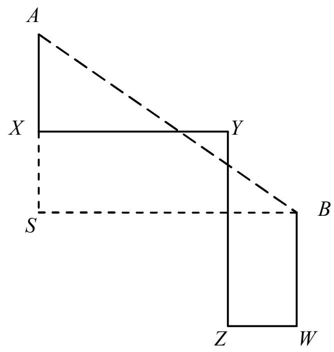
SUBIECTUL 2.

1. Membrul stâng al ecuaţiei $= \sqrt{9x^2}$ .... **5x1p=5p**
   $\Leftrightarrow 3|x| = 2016 \Leftrightarrow |x| = 672 \Leftrightarrow x \in \left\{\pm 672\right\}$ **3p**
2. Presupunem, prin absurd, că a , b , c sunt numere consecutive $\Rightarrow$ că există $x \in Z$ astfel încât $a = b - 1$ şi $c = b + 1$ **2p**
   Atunci expresia $E = b^3 + 2b + 3b^2 + 6$ **2p**
   Descompunerea $E = \left(b+3\right)\left(b^2+2\right)$.. **3p**
   Cum E este nr prim rezultă situaţiile :
   - $b + 3 = 1 \Rightarrow b = -2 \Rightarrow E = 6$ nu este prim, contradicţie **1p**
   - x+3=-1 $b + 3 = -1 \Rightarrow b = -4 \Rightarrow E = -18$ nu este prim , contradicţie **1p**
   - $b^2 + 2 = \pm 1 \Rightarrow b^2 \in \left\{-1; -3\right\}$ nr negativ , absurd **2p**

   Prin urmare, a , b , c nu pot fi numere consecutive **1p**

SUBIECTUL 3.

1. ***a)*** Notăm cu X ; Y ; Z şi W, punctele în care piratul îşi schimbă direcţia de mers. Avem : $AX = 3\,km$, $XY = 6\,km$, $YZ = 8\,km$, $ZW = 2\,km$, $WB = 5\,km$. ……………………………… **1p**



Notăm intersecţia perpendicularei din B pe AX cu YZ cu T, iar cu drepta AX cu S. Cum $ZT = BW = 5$ rezultă $XS = YT = YZ - ZT = 8 - 5 = 3$ iar $AS = AX + XS = 3 + 3 = 6$.
Cum $BT = ZW = 2$ şi $ST = XY = 6$ rezultă că $BS = BT + TS = 2 + 6 = 8$ ………………………………………… **1p**

Aplicând teorema lui Pitagora în $\triangle ASB$, dreptunghic în S, obţinem : $AB^2 = SA^2 + SB^2 \Leftrightarrow AB^2 = 8^2 + 6^2 \Leftrightarrow AB^2 = 100$.
Prin urmare distanţa în linie dreaptă este de 10 km……………………………………….. **2p**

b) calculul lui $AY = 3\sqrt{5}$ ……………………………………………………………….. **1p**

calculului lui $BY = \sqrt{13}$ ……………………………………………………………….. **1p**

Verificarea condiţiei existenţei triunghiului $AB < AY + BY \Leftrightarrow 10 < \sqrt{45} + \sqrt{13}$ (fals) … **2p**

2.

a) $m(\sphericalangle ABC) = 72^0$ ………………………………………………………………/……… **1,5P**

1. a) $\left.\begin{matrix} \sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle DBA \\ \sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle BCD \end{matrix}\right| \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle BDC$ **1P**

$m(\sphericalangle CBD) = \frac{1}{2} m(\sphericalangle ABC) = 36^0 = m(\sphericalangle BAC)$ ……………………………………….**1,5p**

b) $\triangle ABC \sim \triangle BDC$ **(1P)** $\Rightarrow \frac{AC}{BC} = \frac{BC}{DC}$ **(2P)** $\Rightarrow BC^2 = AC \cdot DC$ **(1P)**

$[AD] \equiv [BD] \equiv [BC] \Rightarrow DC = AC - BC$ **1P**

$BC^2 = AC^2 - AC \cdot BC$
$BC(BC + AC) = AC^2$ **1P**