CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ "SEVER AUREL GROZE"
Ediţia a IV-a, Năsăud, 6-8 mai 2016

CLASA a IV-a

1. Suma a trei numere naturale este 60. Aflaţi numerele ştiind că dacă mărim cu 4 jumătatea primului număr, cu 8 jumătatea celui de al doilea număr şi cu 12 jumătatea celui de al treilea număr obţinem trei numere consecutive (în această ordine).

2. Trei sferturi dintr-un număr fac cât două cincimi din alt număr. Aflaţi cele două numere ştiind că diferenţa lor este 21.

G.M. nr. 11/2015

3. Se consideră şirul: 1, 4, 13, 40, …

a. Scrieţi următorii patru termeni ai şirului.

Barem de evaluare

1.	Fie a, b,c cele trei numere $a+b+c=60$ şi $\frac{a}{2}+4, \frac{b}{2}+8, \frac{c}{2}+12$ sunt numere consecutive $\frac{b}{2}+8=\left(\frac{a}{2}+4\right)+1$, iar $\frac{c}{2}+12=\left(\frac{a}{2}+4\right)+2$ Din $\frac{b}{2}+8=\frac{a}{2}+5 \Big\vert -5 \Rightarrow \frac{b}{2}+3=\frac{a}{2}\Big\vert \cdot 2 \Rightarrow b+6=a \Rightarrow b=a-6$ $\frac{c}{2}+12=\frac{a}{2}+6 \Rightarrow \frac{c}{2}+6=\frac{a}{2} \Rightarrow c=a-12$ Înlocuind în $a+b+c=60$ obţinem: $a+a-6+a-12=60 \Rightarrow 3a-6-12$ $=60 \Big\vert +6 \Rightarrow 3a-12=66\Big\vert +12 \Rightarrow 3a=78 \Rightarrow a=26$ $b=20; c=14$	1 p 1 p 1 p 1 p 1 p 1 p 1 p
2.	Fie x şi y cele două numere Din $\frac{3}{4}\cdot x=\frac{2}{5}\cdot y$ *şi* $\frac{3}{4}>\frac{2}{5}$ avem $y>x$ $y-x=21 \Rightarrow y=x+21$ $\frac{3}{4}x=\frac{2}{5}(x+21) \vert \cdot 20$ $15x=8x+168 \vert -8x$ $7x=168 \Rightarrow x=24$ $y=24+21 \Rightarrow y=45$	1 p 1 p 1 p 1 p 1 p 1 p 1 p
3.	a) Fiecare termen al şirului se află din precedentul înmulţit cu 3 şi adunat cu 1. Următorul termen este $40\cdot 3+1=121$, *apoi* $121\cdot 3+1=364; 364\cdot 3+1=1093; 1093\cdot 3+1=3280$ b) Cum 2016-1093=923, iar 3280-2016=1264, termenul cel mai apropiat de 2016 este 1093	1 p 2 p 2 p

Rezolvarea prin alte metode (de ex. figurativ) se punctează corespunzător.

Aflarea soluţiei „prin încercări" se notează cu maxim 5 p.

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ "SEVER AUREL GROZE"

Ediţia a IV-a, Năsăud, 6-8 mai 2016

Enunţuri şi barem, clasa a V-a

1. *Sunt scrise la rând 2016 de cifre. Oricare două cifre vecine formează un număr care se descompune ca produs de trei numere prime distincte.*
   Să se afle cifra situată pe poziţia 1008.

Soluţie:

Cifrele prime sunt 2,3,5 şi 7 $\Rightarrow 30 = 2\cdot3\cdot5;\ 42 = 2\cdot3\cdot7; 70 = 2\cdot5\cdot7;\ (3\cdot5\cdot7 = 105)$ 2p

Putem avea ca factor prim şi un număr de 2 cifre $\Rightarrow 66 = 2\cdot3\cdot11;\ 78 = 2\cdot3\cdot13$ 1p

Orice alt produs de factori primi va fi un număr de cel puţin 3 cifre 1p

Pentru ca numărul format de oricare 2 cifre vecine să aibă proprietatea din enunţ, trebuie ca ultima lui cifră a primului număr de 2 cifre să fie prima cifră a următorului ş.a.m.d. => 1p

singura variantă posibilă e ca toate numerele de 2 cifre să fie 66 => 1p

pe poziţia 1008 se află cifra 6. 1p

2. *Un număr $\overline{abc}$ se numeşte n-norocos dacă a+b+c=n şi $\overline{abc} \vdots n$.*
   Fie $B = \{n \in \boldsymbol{N} | există\ un\ număr\ n - norocos\}$.
   Arătaţi că mulţimea B are cel puţin 20 de elemente.

Soluţie:

Pentru n număr de o cifră, $\overline{n00} \vdots n \Rightarrow \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\} \subset B$ 2p

Pentru $\mathrm{n} = 2\mathrm{p},\ p \in \{5,6,7,8,9\},\ \overline{\mathrm{pp0}} \vdots \mathrm{n} \Rightarrow \{10,12,14,16,18\} \subset \mathrm{B}$ 2p

Pentru $\mathrm{n} = 3\mathrm{p},\ p \in \{5,7,8,9\},\ \overline{\mathrm{ppp}} \vdots \mathrm{n} \Rightarrow \{15,21,24,27\} \subset \mathrm{B}$ 1p

$605 \vdots 11 \Rightarrow 11 \in \mathrm{B}$ 1p

Se găseşte unul din următoarele $247 \vdots 13, 476 \vdots 17$, sau $874 \vdots 19 \Rightarrow card(B) \geq 20$. 1p

3. *Aflaţi numerele $\overline{abcde}$ ştiind că $\overline{abcde} = \overline{ab}\cdot(a+b+c+d+e)^2$.*

G.M. 2/2016

Soluţie:

$\overline{ab}\cdot1000 + \overline{cde} = \overline{ab}\cdot(a+b+c+d+e)^2 \Leftrightarrow$

$\overline{cde} = \overline{ab}\cdot[(a+b+c+d+e)^2 - 1000] \Rightarrow a+b+c+d+e \geq 32$ 1p

$Dacă\ a+b+c+d+e \geq 34 \Rightarrow \overline{cde} \geq 10\cdot(34^2 - 1000) \Rightarrow \overline{cde} \geq 1560(\text{fals}) \Rightarrow$

$a+b+c+d+e \in \{32,33\}$ 1p

Dacă $a+b+c+d+e = 33 \Rightarrow \overline{cde} = \overline{ab}\cdot89 \Rightarrow \overline{ab} \in \{10,11\}$ care nu convin $\Rightarrow$ 1p

$a+b+c+d+e = 32$ şi $\overline{cde} = \overline{ab}\cdot24 \Rightarrow \overline{cde} = 240a + 24b \Rightarrow$

$99c + 9d + 32 = 243a + 27b - (2a+2b) \Rightarrow 2\mathrm{a} + 2\mathrm{b} - 4 \vdots 9 \Rightarrow$ 1p

$2(a+b-2) \vdots 9; (2,9) = 1 \Rightarrow a+b-2 \vdots 9 \Rightarrow a+b \in \{2,11\} \Rightarrow$ 1p

Deoarece $50\cdot24 = 1200 \Rightarrow a \leq 4 \Rightarrow a = 1, b = 1 \Rightarrow \overline{cde} = 264$ nu verifică

$a = 2, b = 9 \Rightarrow \overline{cde} = 29\cdot24 = 696, 2+9+6+9+6 = 32 \Rightarrow 29696$ e soluţie 1p

$a = 3, b = 8 \Rightarrow \overline{cde} = 38\cdot24 = 912$ nu verifică

$a = 4, b = 7 \Rightarrow \overline{cde} = 47\cdot24 = 1128$ fals 1p

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ "SEVER AUREL GROZE"

Ediţia a IV-a, Năsăud, 6-8 mai 2016

Enunţuri şi barem, clasa a VI-a

1. *Determinaţi numerele naturale x, 2000 < x < 3000, care împărțite la 6, 7 și 11 dau resturile 3, 1, respectiv 4.*

G.M. 3/2016

Soluţie:

$$\left.\begin{array}{l} x = 6\cdot c_1 + 3 \;\; | -15 \\ x = 7\cdot c_2 + 1 \;\; | -15 \\ x = 11\cdot c_3 + 4 \, | -15 \end{array}\right\} \Rightarrow$$ 2p

$$\left.\begin{array}{l} x - 15 = 6\cdot (c_1 - 2) \\ x - 15 = 7\cdot (c_2 - 2) \\ x - 15 = 11\cdot (c_3 - 1) \end{array}\right\} \Rightarrow$$ 1p

$$\left.\begin{array}{l} x - 15 \vdots 6 \\ x - 15 \vdots 7 \\ x - 15 \vdots 11 \end{array}\right\} \Rightarrow x - 15 \vdots [6,7,11] \Rightarrow$$ 1p

$x - 15 \vdots 462 \Rightarrow x - 15 = 462k \Rightarrow x = 462k + 15 \Rightarrow$ 1p

$2000 < 462k + 15 < 3000 \Rightarrow k \in \{5,6\} \Rightarrow x \in \{2325,2787\}$ 2p

2. *a) Găsiţi toate numerele naturale de 4 cifre, formate din cifre de 6 şi 8, care sunt divizibile cu 32;*
   b) Arătaţi că există un multiplu al lui 2016 format din cifre de 6 şi 8.

Soluţie:

a) $n \vdots 32 \Rightarrow n \vdots 4 \Rightarrow u_2(n) \in \{68,88\}$ 1p

$\Rightarrow n \in \{6668,6868,8668,8868,6688,6888,8688,8888\}$

Pentru $u_2(n) = 68 \Rightarrow n + 32 \in \{6700,6900,8700,8900\}$, nu sunt multiplii de 32, etc., sau se verifică direct, prin calcul, că singurul multiplu de 32 este 6688. 1p

b) $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$ 1p

Căutăm un multiplu de 32 care se scrie doar cu cifre de 6 şi 8. L-am găsit pe 6688.

Fie $a_1 = 6688$

$a_2 = 66886688$

....

$a_{64} = \underbrace{6688 \ldots 6688}_{256\ de\ cifre}$

Avem 64 de numere şi 63 de resturi posibile la împărţirea cu 63 ⇒(folosind principiul cutiei) că există cel puţin 2 numere, ai şi aj, i>j, care dau acelaşi rest la împărţirea cu 63 1p

⇒ai-aj⋮ 63 ⇔ $\underbrace{6688 \dots 6688}_{4i\ cifre} - \underbrace{6688 \dots 6688}_{4j\ cifre} \vdots 63 \Leftrightarrow \underbrace{6688 \dots 6688}_{4i-4j\ cifre}\underbrace{00 \dots 0}_{4j\ cifre} \vdots 63$

$\Rightarrow \underbrace{6688 \dots 6688}_{4i-4j\ cifre} \cdot 10^{4j} \vdots 63$ (1) 1p

Dar $63 = 3^2 \cdot 7$ => $(10^{4j},63)=1$ (2)

Notăm $n = \underbrace{6688 \dots 6688}_{4i-4j\ cifre}$

Din (1) şi (2), folosind lema lui Gauss => $n \vdots 63$ 1p

$n = \underbrace{6688 \dots 6688}_{4i-4j\ cifre} = 6688 \cdot \underbrace{10001000 \dots 10001}_{i-j\ de\ 1} \vdots 32 \Rightarrow n \vdots [63,32] \Rightarrow n \vdots 2016$. (q.e.d.) 1p

3. *Se consideră ΔABC isoscel,AB=AC, cu $m(\sphericalangle B) = 30^o$. Paralelele prin B şi C la AC, respectiv AB, se intersectează în punctul D, iar punctele $M \in (BD)$şi $N \in (CD)$. Să se demonstreze că $(BM) \equiv (DN) \Leftrightarrow \Delta AMN\ este\ echilateral.$*

Soluţie:

$\Delta ABC\ isoscel\ (AB = AC) \Rightarrow m(\sphericalangle ACB) = m(\sphericalangle ABC) = 30^o$ 1p

$m(\sphericalangle ABC) = m(\sphericalangle BCD) = 30^o\ (alt.\ int.);\ analog\ m(\sphericalangle ACB) = m(\sphericalangle CBD) = 30^o \Rightarrow$

$m(\sphericalangle BCD) = m(\sphericalangle CBD) = 30^o \Rightarrow \Delta BDC$ isoscel ⇒ 1p

$BD = DC \Rightarrow AD$ mediatoarea lui $[BC] \Rightarrow AD$ bisectoare în ΔABC și $\Delta BDC \Rightarrow$

$m(\sphericalangle DAB) = m(\sphericalangle BDA) = 60^o \Rightarrow \Delta ABD$ echilateral $\Rightarrow AB = AD$ 1p

și $m(\sphericalangle ABM) = m(\sphericalangle ADN) = 60^o$

"⇒" $BM = DN \Rightarrow \Delta ABM \equiv \Delta ADN\ (L.U.L) \Rightarrow AM = AN$ 1p

Dar $m(\sphericalangle BAM) = m(\sphericalangle DAN) \Rightarrow m(\sphericalangle MAN) = m(\sphericalangle BAD) = 60^o \Rightarrow$

ΔAMN isoscel cu un unghi de $60^o \Rightarrow \Delta AMN$ echilateral. 1p

"⇐" ΔAMN echilateral $\Rightarrow m(\sphericalangle MAN) = 60^o = m(\sphericalangle BAD) \Rightarrow m(\sphericalangle BAM) = m(\sphericalangle DAN)$ 1p

și $AM = AN; AB = AD \Rightarrow \Delta ABM \equiv \Delta ADN\ (L.U.L) \Rightarrow BM = DN.$ 1p

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ "SEVER AUREL GROZE"

Ediţia a IV-a, BECLEAN, 6-8 mai 2016

Enunţuri şi barem, clasa a VII-a

1. Fie $x, y \in \boldsymbol{R}$, astfel încât $\sqrt{x^2-22x+130}+\sqrt{y^2+12y+45}=12$.
   Arătaţi că $x>y$.

Soluţie:

$\sqrt{x^2-22x+130}+\sqrt{y^2+12y+45}=12 \Leftrightarrow \sqrt{(x-11)^2+9}+\sqrt{(y+6)^2+9}=12$ 1p

Cum $\sqrt{(x-11)^2+9} \geq 3$ şi $\sqrt{(y+6)^2+9} \geq 3 \Rightarrow$ 1p

$\sqrt{x^2-22x+130} \leq 12-3 \Leftrightarrow (x-11)^2+9 \leq 81 \Leftrightarrow (x-11)^2 \leq 72 \Rightarrow$ 1p

$-\sqrt{72} \leq \mathrm{x}-11 \leq \sqrt{72} \Leftrightarrow 11-6\sqrt{2} \leq \mathrm{x} \leq 11+6\sqrt{2}$ 1p

$\sqrt{(y+6)^2+9} \leq 12-3 \Leftrightarrow (y+6)^2+9 \leq 81 \Leftrightarrow (y+6)^2 \leq 72 \Rightarrow$ 1p

$-\sqrt{72} \leq \mathrm{y}+6 \leq \sqrt{72} \Leftrightarrow -6-6\sqrt{2} \leq \mathrm{y} \leq -6+6\sqrt{2}$ 1p

Dar $12\sqrt{2} < 17 \Rightarrow \mathrm{y} \leq -6+6\sqrt{2} < 11-6\sqrt{2} \leq \mathrm{x}$ (q.e.d.) 1p

2. *Să se determine toate numerele întregi x şi y care verifică egalitatea*

$$x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=y^2 .$$

Soluţie:

Grupând termenii câte trei, membrul stâng se descompune în factori şi ecuaţia devine $(x^2+x+1)(x^3+1)=y^2$.	1p
Avem $x^2+x+1=(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}>0$, *pentru orice număr real* x. Cum $y^2 \geq 0$ deducem că $x^3+1 \geq 0$, *deci* $x \geq -1$. Pentru $x=-1$ obţinem $y=0$, iar pentru $x=0$ obţinem $y^2=1$, *adică* $y=\pm 1$. Fie $x \geq 1$. Observăm că dacă (x, y) este o soluţie, atunci şi perechea $(\mathrm{x}, -y)$ este o soluţie. Putem considera $y>0$. Atunci $y^2=x^5+x^4+x^3+x^2+x+1 \geq 6$, deci $y \geq \sqrt{6}$. Cum y este un număr natural obţinem $y \geq 3$.	1p
Lemă: *Pentru orice număr natural x numerele* x^2+x+1 *şi* x^3+1 *sunt relativ prime.* Într-adevăr, presupunând contrariul, rezultă că există un număr prim p astfel încât	2p

$p\|x^2+x+1$ și $p\|x^3+1$. Cum $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$ se divide cu numărul prim p, rezultă că $p\|x+1$ *sau* $p\|x^2-x+1$. Atunci $p\|(x^2+x+1)-(x+1)$ *sau* $p\|(x^2+x+1)-(x^2-x+1)$, adică $p\|x^2$ *sau* $p\|2x$. Rezultă că $p\|x$ *sau* $p\|2$. Dacă $p\|x$ obținem $p\|(x^2+x+1)-(x^2+x)$, *adică* $p\|1$, absurd! Dacă $p = 2$ obținem $p\|(x^2+x+1)=x(x+1)+1$, imposibil, deoarece numărul $x(x+1)$ este par.	
Dacă $y=p_1^{m_1}\dots p_k^{m_k}$, este descompunerea în factori primi a lui y, atunci $$(x^2+x+1)(x^3+1)=p_1^{2m_1}\dots p_k^{2m_k}.$$ În virtutea lemei obținem că x^2+x+1 *și* x^3+1sunt pătrate perfecte. Fie $x^2+x+1=a^2$, unde a este un număr natural. Cum $x\geq 1$, deducem că $a\geq 2$. Deoarece ecuația de gradul al doilea $x^2+x+1-a^2=0$ are soluții întregi, trebuie ca $\Delta=1-4(1-a^2)$să fie pătrat perfect, adică $4a^2-3=b^2$, unde b este număr natural. Atunci $(2a-b)(2a+b)=3$ și cum a, b sunt numere naturale deducem că $2a-b=1$ *şi* $2a+b=3$. Adunând cele două relaţii obținem $a=1$, imposibil! În concluzie, perechile *(x, y)* care verifică cerințele problemei sunt: (-1;0), (0;1), (0;-1)	3p

3. În triunghiul dreptunghic *ABC* cu $m(\sphericalangle BAC)=90^o$, bisectoarea [*CD* a unghiului ACB, $D\in AB$ intersectează perpendiculara în B pe BC în punctul E. Ştiind că *CE²=8·AD·BD*, calculaţi unghiurile triunghiului ABC.

G.M. 12/2015

Soluţie:

$m(\sphericalangle BEC)=90^o-m(\sphericalangle BCD)=90^o-m(\sphericalangle ACD)=m(\sphericalangle ADC)=m(\sphericalangle BDE)\Rightarrow$
ΔBED isoscel $\Rightarrow BE=BD$ 1p

Fie $BM\perp CE\Rightarrow BM$ e înălțime și mediană în ΔBED isoscel $\Rightarrow EM=MD=\frac{ED}{2}$ 1p

$\Delta ADC\sim\Delta MDB\ (U.U.)\Rightarrow\frac{AD}{MD}=\frac{DC}{BD}\Rightarrow AD\cdot BD=\frac{ED}{2}\cdot DC\Rightarrow$ 1p

$CE^2=8\cdot\frac{ED}{2}\cdot DC=4\cdot ED\cdot DC\Rightarrow$ 1p

$(ED+DC)^2=4\cdot ED\cdot DC\Rightarrow ED^2+2\cdot ED\cdot DC+DC^2=4\cdot ED\cdot DC\Rightarrow$ 1p

$ED^2-2\cdot ED\cdot DC+DC^2=0\Rightarrow(ED-DC)^2=0\Rightarrow ED=DC\Rightarrow$ 1p

ΔBED echilateral $\Rightarrow m(\sphericalangle ABC)=30^o, m(\sphericalangle ACB)=60^o$. 1p

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ "SEVER AUREL GROZE"

Ediţia a IV-a, BECLEAN, 6-8 mai 2016

Enunţuri şi barem, clasa a VIII-a

1. Se consideră mulţimea A=$\{a^2+b^2+1 \mid a,b \in N^*\}$.
   a) Să se arate că mulţimea A conţine o infinitate de pătrate perfecte
   b) Dacă x, y, z sunt trei numere naturale pare, atunci $x^2+y^2+z^2 \notin A$
   c) Să se arate că, dacă $x \in$ A, atunci x^2 poate fi scris ca sumă de trei pătrate perfecte nenule.

Soluţie:

a) Pentru a=2k^2 si b=2k $\Rightarrow$ $a^2+b^2+1=4k^4+4k^2+1=(2k^2+1)^2$, k$\in$N — 2p

b) Daca x=2k atunci $x^2=4k^2=M_4$ — 1p

$\Rightarrow x^2+y^2+z^2 = M_4$, dar $a^2+b^2+1 \in \{M_4+1; M_4+2; M_4+3\}$ — 1p

c) $x^2=(a^2+b^2+1)^2=a^4+b^4+1+2a^2b^2+2a^2+2b^2=$ — 1p

$=a^4+b^4+1+2a^2b^2-2a^2-2b^2+4a^2+4b^2=$ — 1p

$=(a^2+b^2-1)^2+(2a)^2+(2b)^2$ — 1p

2. În cubul *ABCDA'B'C'D'* de muchie *a* se consideră punctele *M* şi *N* mijloacele muchiilor [*AB*], respectiv [*CC'*]. Dacă $\{P\}=DB\cap CM$ și $\{Q\}=BN\cap B'C$, calculaţi:
   a) distanţa de la punctul *A'* la dreapta de intersecţie a planelor *(BDQ)* şi *(AB'D)*
   b) măsura unghiului dintre dreptele *PQ* şi *A'D*.

G.M. 3/2016

Soluţie:

a) Notăm $A'B\cap AB'=\{O\}, BN\cap B'C'=\{T\}, D'C'\cap A'T=\{E\}$
(BDQ)=(BDT) şi *(AB'D)=(AB'TD)*$\Rightarrow (BDQ)\cap(AB'D)=DT$ — 1p

$A'E=\frac{a\sqrt{5}}{2}\Rightarrow A'T=a\sqrt{5}; A'D=a\sqrt{2}$ — 1p

În $\Delta C'DT$ dreptunghic în $C' \xrightarrow{T.Pit.} DT=a\sqrt{3}$ — 1p

$A'T^2 = DT^2 + A'D^2 \xRightarrow{R.T.Pit.} \Delta A'DT$ dreptunghic în $D \Rightarrow d(A', DT) = A'D = a\sqrt{2}$. 1p

b) $A'D \parallel B'C \Rightarrow m(\sphericalangle(A'D, PQ)) = m(\sphericalangle(B'C, PQ)) = m(\sphericalangle B'QP)$ 1p

$MC = \frac{a\sqrt{5}}{2}; PC = \frac{2}{3}MC = \frac{a\sqrt{5}}{3}; PB = \frac{1}{3}DB = \frac{a\sqrt{2}}{3}; PB'^2 = a^2 + \frac{2a^2}{9} = \frac{11a^2}{9}$

În $\Delta PB'C \xRightarrow{T.Stewart} PQ^2 \cdot B'C = PB'^2 \cdot QC + PC^2 \cdot B'Q - B'Q \cdot QC \cdot B'C \Rightarrow$

$\Rightarrow PQ^2 = \frac{1}{3}PB'^2 + \frac{2}{3}PC^2 - \frac{2}{9}B'C^2 = \frac{1}{3}a^2$ 1p

Dar $PQ^2 + B'Q^2 = \frac{a^2}{3} + \frac{8a^2}{9} = \frac{11a^2}{9} = PB'^2 \xRightarrow{R.T.Pit.} m(\sphericalangle B'QP) = 90^\circ$. 1p

3. *Să se determine toate numerele întregi n pentru care numărul*

$$N = (n^2 - n + 1)(n^2 + 3n + 1)$$

este pătrat perfect.

Soluţie. Avem

$$N = (n^2 - n + 1)(n^2 + 3n + 1) = [(n-1)^2 + n][(n+1)^2 + n] =$$
$$(n^2-1)^2 + 2(n^2+1)n + n^2 = (n^2-1)^2 + 2(n^2 - 1 + 2)n + n^2 =$$
$$= (n^2-1)^2 + 2(n^2-1)n + n^2 + 4n = (n^2+n-1)^2 + 4n.$$

2p

Pentru $n = 0$ avem $N = 1$. Vom arăta că pentru $n \neq 0$ numărul N nu este pătrat perfect.

Pentru $n = 1$ avem $N = 5$, care nu este patrat perfect. Dacă $n \geq 2$ avem inegalitatile

$$(n^2+n-1)^2 < (n^2+n-1)^2 + 4n < (n^2+n-1+1)^2.$$

Inegalitatea din stânga este evidentă. Inegalitatea din dreapta este echivalentă cu $4n < 2(n^2+n-1)+1$, adică $2n^2 - 2n - 1 > 0$, adevă rată pentru orice număr natural $n \geq 2$. Prin urmare numărul N nu poate fi pătrat perfect pentru orice $n \geq 1$.

2p

Pentru $n \leq -1$ procedăm astfel. Verificăm prin calcul direct că pentru $n = -1, -2, -3$, numărul N nu este pătrat perfect. Dacă $n \leq -4$ avem inegalităţiile

$$(n^2+n-1-1)^2 < (n^2+n-1)^2 + 4n < (n^2+n-1)^2.$$

2p

Inegalitatea din partea dreaptă este evidentă. Inegalitatea din stânga este echivalentă cu $-2(n^2+n-1)+1 < 4n$, adică $2n^2 + 6n - 3 > 0$, adevărată pentru orice număr întreg $n \leq -4$. Deci N nu este pătrat perfect pentru orice $n \leq -1$.

1p

În concluzie, singura soluţie este $n = 0$.