P1

Clasa a VI-a

Să se determine toate perechile de numere naturale formate din a şi b astfel încât $(a,b)+[a,b]=b+9$, unde cu (a,b) s-a notat *cel mai mare divizor comun al numerelor naturalea şi b* iar prin $[a,b]$ s-a notat *cel mai mic multiplu comun al nuemerelor naturale a şi b.*

prof. Gheorghe Lobonţ, *Colegiul Naţional „Emil Racoviţă" Cluj-Napoca*

Soluţie.

Fie $d=(a,b)$ cel mai mare divizor comun al numerelor naturale a şi b respectiv $m=[a,b]$ cel mai mic multiplu comun al numerelor a şi b. Se ştie că $d\cdot m=a\cdot b$. Cum $d|b$ şi $d|m$ din relaţia $d+m=b+9$, rezultă că $d|9$. Prin urmare $d\in\{1,3,9\}$. 1p

(I) $d=1$

• În acest caz a şi b sunt prime între ele şi relaţia se scrie $1+a\cdot b=b+9 \Leftrightarrow b(a-1)=8$. Prin urmare se obţin:

$b=1$ şi $a-1=8 \Leftrightarrow a=9$ deci $(9,1)$ este soluţie;

sau $b=2$ şi $a-1=4 \Leftrightarrow a=5$ deci $(5,2)$ este soluţie;

sau $b=4$ şi $a-1=2 \Leftrightarrow a=3$ deci $(3,4)$ este soluţie;

sau $b=8$ şi $a-1=1 \Leftrightarrow a=2$ nu se obţine soluţie pentru că a şi b nu sunt prime între ele. 2p

(II) $d=3$

• În acest caz $d+m=b+9 \Leftrightarrow 3+\frac{ab}{3}=b+9 \Leftrightarrow 9+ab=3b+27 \Leftrightarrow b(a-3)=18$. Cum b trebuie să fie un multiplu de $3 \Rightarrow b\in\{3,6,9,18\}$. Prin urmare se obţin:

$b=3$ şi $a-3=6 \Leftrightarrow a=9$ deci $(9,3)$ este soluţie;

$b=6$ şi $a-3=3 \Leftrightarrow a=6$ nu este soluţie pentru că d nu este 3;

$b=9$ şi $a-3=2 \Leftrightarrow a=5$ nu este soluţie pentru că $d\neq 3$;

$b=18$ şi $a-3=1 \Leftrightarrow a=4$ nu este soluţie pentru că $d\neq 3$. 2p

(III) $d=9$

• În acest caz cum $m=\frac{ab}{d}$ relaţia dată se scrie $81+ab=9b+81 \Leftrightarrow ab=9b$. Dacă b este nenul atunci $a=9$ şi soluţiile sunt de forma $(9,9k)$ unde $k\in\mathbb{N}^*$. Dacă $b=0$ atunci a este natural oarecare dar $(a,0)=a$ şi $[a,0]=0 \Rightarrow a+0=0+9$ şi soluţia este $(9,0)$. 2p

Mulţimea perechilor de numere naturale (a,b) care verifică relaţia din ipoteză este formată din elementele: $(9,1)$; $(5,2)$, $(3,4)$, $(9,3)$ şi $(9,9k)$ unde $k\in\mathbb{N}$.

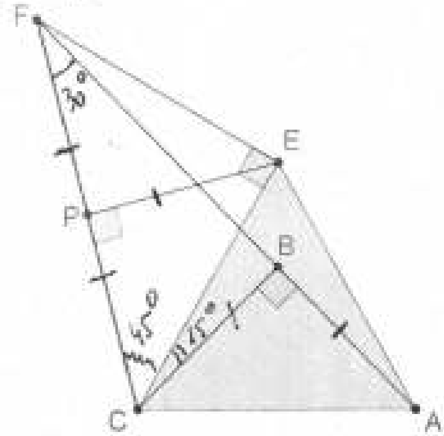
P2

Problemă clasa a VI-a

Fie ΔAEC echilateral și ΔABC dreptunghic isoscel a.î. $B \in Int(\Delta AEC)$. Pe semidreapta (AB se considera punctul F a.î. $CF = 2AB$. Arătați că $EF \perp EC$.

Bud Adrian Negresti Oas

Soluție



În ΔBFC, $\left.\begin{matrix} CF = 2BC \\ m(\measuredangle B) = 90° \end{matrix}\right\} \Rightarrow m(\measuredangle CFB) = 30° \Rightarrow m(\measuredangle FCB) = 60°$;

$m(\measuredangle ECB) = m(\measuredangle ECA) - m(\measuredangle BCA) = 60° - 45° = 15° \Rightarrow$ (1p)

$\Rightarrow m(\measuredangle ECF) = m(\measuredangle BCF) - m(\measuredangle BCE) = 60° - 15° = 45°$

Fie $P \in [FC]$ a.î. $[PC] \equiv [CB]$ (1p)

$\begin{matrix} \Delta CPE \\ \Delta CBA \end{matrix} \left\{\begin{matrix} [CP] \equiv [CB] \\ \measuredangle PCE \equiv \measuredangle BCA \\ [CE] \equiv [CA] \end{matrix}\right. \xRightarrow{L.U.L}$ (1p)

$\Delta CPE \equiv \Delta CBA \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \Delta PEC \text{ dreptunghic isoscel} \\ \cancel{[PC] \equiv [BC]} \end{matrix}\right. \Rightarrow$ (1p)

$[PC] \equiv [BC]$, $[BC] \equiv [AB]$ și $CF = 2AB \Rightarrow$

$\Rightarrow P$ *este mijlocul lui* $FC \Rightarrow$ în ΔEFC, $\left.\begin{matrix} EP \text{ mediană} \\ \text{înălțime} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \Delta EFC \text{ isoscel} \\ m(\measuredangle ECF) = 45° \end{matrix}\right\} \Rightarrow$

(1p)

$m(\measuredangle FEC) = 90° \Rightarrow$ 1p

$\Rightarrow EF \perp EC$ 1p

VII.5.2

Să se afle numerele naturale x știind că numerele naturale x și n satisfac relația:

$501 \cdot 502 \cdot \ldots \cdot 2015 \cdot 2016 = 2^x \cdot (2n+1)$

Soluție

Avem: $501 \cdot 502 \cdot \ldots \cdot 2015 \cdot 2016 = \frac{2016!}{500!} =$ (2p)

$= \frac{2^a(2c+1)}{2^b(2d+1)} = 2^{a-b} \cdot (2t+1)$ (1) (1p)

$a, b, c, d, t \in N$.

Din ipoteză și rel. (1), deducem:

$2^x(2n+1) = 2^{a-b} \cdot (2t+1), \Rightarrow x = a-b, n = t$ (1p)

$a = \left[\frac{2016}{2}\right] + \left[\frac{2016}{2^2}\right] + \ldots + \left[\frac{2016}{2^{10}}\right] =$

$1008 + 504 + 252 + 126 + 63 + 31 + 15 + 7 + 3 + 1 = 2010$ (1p)

$b = \left[\frac{500}{2}\right] + \left[\frac{500}{2^2}\right] + \ldots + \left[\frac{500}{2^8}\right] =$

$250 + 125 + 62 + 31 + 15 + 7 + 3 + 1 = 494$ (1p)

Atunci $a - b = x$ este $2010 - 494 = 1516$ (1p)

$x = 1516$.

Vasile Șerdean
Gherla

cls 6

Demonstrați că numărul 2211^{2018} se scrie ca sumă a 66 cuburi distincte de numere naturale.

Soluție

$$2211^{2018} = 2211^{2} \cdot 2211^{2016} \quad (1p)$$

$$2211^{2} = \left(\frac{66 \cdot 67}{2}\right)^{2} = 1^{3} + 2^{3} + \dots + 66^{3} \quad (4p)$$

(Am folosit relația $1^{3} + 2^{3} + \dots + n^{3} = \frac{n^{2}(n+1)^{2}}{4} = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^{2}$)

$$2211^{2018} = 2211^{2} \cdot 2211^{2016} =$$

$$= (1^{3} + 2^{3} + \dots + 66^{3})(2211^{672})^{3} = \quad (1p)$$

$$= \sum_{k=1}^{66} (k \cdot 2211^{672})^{3}. \quad \text{c.c.t.d.} \quad (1p)$$

VI / P4

Vasile Serdean

Gherla

Cls 6