VII/B1

[D]eterminați elementul eliminat din mulțimea: $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ [ș]tiind că media aritmetică a elementelor rămase este $\frac{1888}{43}$.

Soluție

[S]uma elementelor mulțimii este $1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ (1)

[D]acă s-a șters unul dintre numere, putem obține:

[a]) Cea mai mică sumă a elementelor, când se șterge n. Suma elementelor rămase este $\frac{(n-1)\cdot n}{2}$ (1)

[b]) Cea mai mare sumă a elementelor când se șterge 1. Suma elementelor rămase este: (1p)

$$2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2} - 1 = \frac{(n+2)(n-1)}{2}$$

[Î]ncadrăm media aritmetică a elementelor rămase: (1p)

$$\frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{1}{n-1} < \frac{1888}{43} < \frac{(n-1)(n+2)}{2}\cdot\frac{1}{n-1}$$

Din $\frac{n}{2} < \frac{1888}{43} \Rightarrow n \in \{1, 2, \ldots 86, 87\}$ (1)

Din $\frac{1888}{43} < \frac{n+2}{2} \Rightarrow n \in \{86, 87, \ldots\}$ (2) (1p)

Din (1) și (2) $\Rightarrow n \in \{86, 87\}$

Fie K elementul eliminat din mulțime

Atunci $m_a = \frac{1+2+3+\cdots+(K-1)+(K+1)+\cdots+n}{n-1} = \frac{\frac{n(n+1)}{2} - K}{n-1}$ (1p)

Deci $m_a = \frac{\frac{n(n+1)}{2} - K}{n-1}$

1) Pentru $n = 86$ obținem: $\frac{1888}{43} = \left(\frac{86\cdot 87}{2} - K\right)\frac{1}{85} \Rightarrow K \notin \mathbb{N}$

2) Pentru $n = 87 \Rightarrow \frac{1888}{43} = \left(\frac{87\cdot 88}{2} - K\right)\cdot\frac{1}{85} \Rightarrow \boxed{K = 52}$ (1p)

Elementul eliminat este 52.

Vasile Șerdean cls. VII

P2

Clasa a VII-a

În trapezul isoscel ABCD, $AB \parallel CD$, $AB > CD$, $AB = a$, $CD = b$, $AC \cap BD = \{O\}$ și $m(\sphericalangle AOB) = 60^0$ se notează cu E, F, G, E_1, F_1, G_1 mijloacele segmentelor (OA), (OD), (BC), (OB), (OC), respectiv (AD). Să se arate că:

a) Triunghiul EFG este echilateral.

b) Să se calculeze în funcție de a și b perimetrul trapezului $ABCD$ precum și al poligonului $EE_1GF_1FG_1$.

prof. Gheorghe LOBONȚ, Colegiul Național „Emil Racoviță" Cluj-Napoca

Soluție:

a) $\triangle AOB, \triangle DOC$ sunt echilaterale și prin urmare rezultă $FF_1 = \frac{1}{2} \cdot DC, EE_1 = \frac{1}{2} \cdot AB, GE_1 = \frac{1}{2} \cdot OC = \frac{1}{2} \cdot DC$ și prin urmare avem $[FF_1] \equiv [GE_1]$ și $F_1G \parallel BD$ iar de aici rezultă că FF_1GE_1 este trapez isoscel. Analog se demonstrează că FF_1EG_1 și G_1EE_1G sunt trapeze isoscele. Cum cele trei trapeze isocele sunt congruente rezultă că $[FG] \equiv [EG] \equiv [FE] \Rightarrow \triangle FEG$ este echilateral.

1p

1p

1p

b) Avem $AB = a, DC = b, AD = BC = 2 \cdot G_1D = 2 \cdot FE$.

1p Fie $FF' \perp EF_1 \Rightarrow FF' = \frac{OF \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{b \cdot \sqrt{3}}{4}, EF' = \frac{2 \cdot a + b}{4}$ și de aici avem

1p $EF = \sqrt{\frac{3 \cdot b^2}{16} + \frac{(2 \cdot a + b)^2}{16}} \Rightarrow EF = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{a^2 + a \cdot b + b^2}$, prin urmare

1p $P_{ABCD} = a + b + 2 \cdot \sqrt{a^2 + a \cdot b + b^2}$. Perimetrul poligonului $EE_1GF_1FG_1$ este

1p $P_{EE_1GF_1FG_1} = EE_1 + E_1G + GF_1 + FF_1 + G_1F + G_1E = \frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{a}{2} + \frac{b}{2} = \frac{3 \cdot (a+b)}{2}$

(VII / P3)

Demonstrați că ~~dacă~~ $x, y \in [0, \sqrt{3}]$ și $z \in [0, \sqrt{6}]$, atunci

$$\sqrt{2}\cdot x(\sqrt{3}-y) + y(\sqrt{6}-z) + z\cdot(\sqrt{3}-x) \leq 3\sqrt{2}$$

Soluție

Considerăm un triunghi dreptunghic isoscel ABC cu catetele $AB = AC = \sqrt{3}$ și ipotenuza $BC = \sqrt{6}$ (1p)

Pe (AB), (BC), (CA) luăm punctele D, E, F astfel încât ~~$DB = \sqrt{3}$~~ $AD = x$, $BE = z$, $CF = y$ (1p)

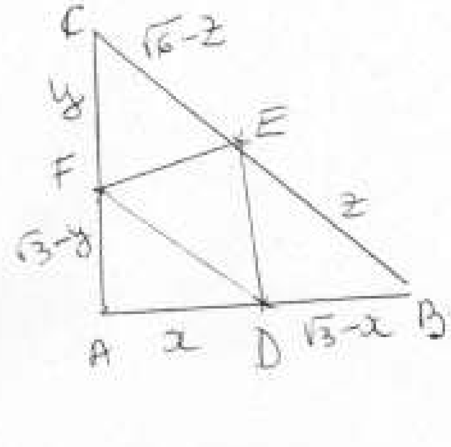
Atunci $DB = \sqrt{3} - x$, $CE = \sqrt{6} - z$, $AF = \sqrt{3} - y$. (1p)

$S[ADF] + S[DBE] + S[CEF] \leq S[ABC] \Leftrightarrow$ (1p)

$\frac{AD \cdot AF}{2} + \frac{DB \cdot BE \sin 45^\circ}{2} + \frac{CE \cdot CF \sin 45^\circ}{2} \leq \frac{AB \cdot AC}{2} \Leftrightarrow$ (1p)

$x\cdot(\sqrt{3}-y) + (\sqrt{3}-x)z\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + (\sqrt{6}-z)\cdot y\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \sqrt{3}\cdot\sqrt{3} \Leftrightarrow |\sqrt{2}$ (1p)

$x\sqrt{2}(\sqrt{3}-y) + z(\sqrt{3}-x) + (\sqrt{6}-z)\cdot y \leq 3\sqrt{2}$ c.c.t.d. (1p)



Vasile Șerdean
Gherla

cls 7.

(VIII / [illegible])

Să se arate că există mai mult de 2017 triplete de numere naturale nenule (a, b, c) astfel încât

$$2017 = b^2 + c^2 - a^2$$

Soluție

Relația dată se mai scrie: (1p)

$a^2 - b^2 = c^2 - 2017 \Leftrightarrow (a-b)(a+b) = c^2 - 2017$ (1)

În (1) luăm $a - b = 1$ și atunci $a + b = c^2 - 2017$ (1p)

Din $a - b = 1$ și $a + b = c^2 - 2017 \Rightarrow a = \frac{c^2 - 2016}{2}$ (2) (1p)

Din $a - b = 1 \Rightarrow b = a - 1 = \frac{c^2 - 2018}{2}$ (3) (1p)

Pentru $c = 2 \cdot n$, $n \in \mathbb{N}^*$, din (2) și (3) obținem: (1p)

$a = 2n^2 - 1008$, $b = 2n^2 - 1009$ (1p)

Nr. $a, b \in \mathbb{N}^*$ pentru $n \geq 23$. (1p)

Pentru $n \geq 23$, tripletele $(2n^2 - 1008, 2n^2 - 1009, 2n)$ sunt soluții. Avem o infinitate de soluții

Vasile Serdean
Gherla

cj 7