# Concursul interjudeţean de matematică Victor Vâlcovici

## Brăila, 20 Mai 2017

Clasa a 7-a

**Problema 1.** Fie $A$ o mulţime cu 2017 elemente cu proprietatea că pentru orice $x \in A$, $2016 \leq x \leq 2017$. Pentru fiecare $t \in \mathbb{R}$ considerăm expresia $E(t) = 2t - 2017$. Arătaţi că există $a, b \in A, a \neq b$ cu proprietatea că

$$|E(a) - E(b)| \leq \frac{1}{1008}.$$

Enache Pătraşcu, Focşani

**Problema 2.** Considerăm $n \in \mathbb{N}, n \geq 4$ şi mulţimea $A = \{x_1, x_2, ..., x_n\} \subset \mathbb{N}$, unde $x_1 < x_2 < ... < x_n$. Se ştie că pentru orice $k \in \{1, 2, ..., n-2\}$ avem $x_k + k\sqrt{x_{k+1}} \in A$.

(a) Determinaţi toate valorile pe care le poate lua $n$.
(b) Dacă $101 \in A$, determinaţi mulţimea $A$.

Gabriel Daniilescu, Brăila

**Problema 3.** Fie $ABCDEF$ un hexagon convex pe care fiecare dintre dreptele $AD, BE$ şi $CF$ îl împarte în câte două patrulatere cu suprafeţe egale.

(a) Demonstraţi că $\Delta ACE \sim \Delta DFB$.
(b) Demonstraţi că dreptele $AD, BE$ şi $CF$ sunt concurente.

Cristi Săvescu, Bucureşti

Solutii

1.

Presupunem că pentru orice $a \neq b \in A$ avem $|E(a) - E(b)| > \frac{1}{1008}$. **(1p)**
Atunci $|a - b| > \frac{1}{2016}$, pentru orice $a \neq b \in A$. **(1p)**
Fie $A = \{a_1 < a_2 < ... < a_{2017}\}$. Atunci $|a_{k+1} - a_k| > \frac{1}{2016}$, pentru $k = 1, 2, ..., 2016$, deci $a_{k+1} - a_k > \frac{1}{2016}$, pentru $k = 1, 2, ..., 2016$. **(2p)**
Sumând pentru $k = 1, 2, ..., 2016$ obţinem $a_{2017} - a_1 > 1$, contradiţie cu $A \subset [2016, 2017]$ **(3p)**.

2.

(a) Din $n \geq 4$ avem $x_2, x_3$ sunt pătrate perfecte, deci $x_2 = k_2^2, x_3 = k_3^2, 1 \leq k_2 < k_3$. **(1p)**
Dar, $x_2 + 2\sqrt{x_3} \geq x_3 \Rightarrow k_2^2 + 2k_3 \geq k_3^2 \Rightarrow k_2^2 + 1 \geq (k_3 - 1)^2$, deci $(k_3 - k_2 - 1)(k_3 + k_2 - 1) \leq 1$. **(1p)**
Atunci $k_3 = k_2 + 1$, deci $x_2 = k^2$ şi $x_3 = (k + 1)^2$. **(1p)**
Observăm că $x_2 + 2\sqrt{x_3} = k^2 + 2k + 2 = x_3 + 1 > x_3$, deci $x_2 + 2\sqrt{x_3} \geq x_4$. Dar $x_3 + 1 \leq x_4$, deci $x_4 = (k + 1)^2 + 1$. **(1p)**
Dacă $n \geq 5$ atunci $x_4$ este pătrat perfect, contradicţie. Deci $n = 4$. **(1p)**

(b) Avem $x_1 < x_2 = k^2$ şi $x_1 + \sqrt{x_2} \in A$, deci $x_1 + \sqrt{x_2} \in \{x_2, x_3, x_4\}$.
Dacă $x_1 + \sqrt{x_2} = x_2 \Rightarrow x_1 = k^2 - k < k^2$.
Dacă $x_1 + \sqrt{x_2} = x_3 \Rightarrow x_1 = k^2 + k + 1 > k^2$.
Dacă $x_1 + \sqrt{x_2} = x_4 \Rightarrow x_1 = k^2 + k + 2 > k^2$.
Aşadar $x_1 = k^2 - k$.**(1p)**
Atunci, $A = \{k^2 - k, k^2, (k + 1)^2, (k + 1)^2 + 1\}$, iar cum $k(k - 1) \neq 101, k \in \mathbb{N}$ şi 101 nu este pătrat perfect, atunci $A = \{72, 81, 100, 101\}$. **(1p)**

3.

(a) Fie $M = AD \cap BE$. Atunci $[ABM] + [BMDC] = [ABCD] = \frac{1}{2}[ABCDEF] = [BCDE] = [DEM] + [BMDC] \Rightarrow [ABM] = [DEM] \Rightarrow AM \cdot MD = MB \cdot ME$ **(1p)**, deci $\Delta AME \sim \Delta DMB$ (1) de unde rezultă că $AE||BD$ **(1p)**. Analog, $BF||CE$ şi $CA||DF$, deci $\Delta ACE \sim \Delta DFB$.**(1p)**

(b) Atunci $\frac{AE}{BD} = \frac{CE}{FB}$ (2).**(1p)**
Din (1) mai avem însă şi relaţia $\frac{ME}{BM} = \frac{AE}{BD}$ (3) **(1p)**.
Fie $N = BE \cap CF$. În mod similar, vom avea că $\Delta BNF \sim \Delta ENC$, deci $\frac{NE}{BN} = \frac{CE}{BF}$ (4) **(1p)**.
Din (2),(3),(4) avem $\frac{ME}{BM} = \frac{NE}{BN}$, deci $M = N$.**(1p)**