BAREM DE CORECTARE – clasa a V-a, 13.02.2010

I. Se acordă din oficiu 1p

$a = 3^{26}$ 3p

$b = (2^{101} : 2^{100}) \cdot 2^{38} = 2^{39}$ 3p

$a = 9^{13} > 8^{13} = b$ 3p

TOTAL: 10p

II. Se acordă din oficiu 1p

Notăm cu n numărul obținut prin ștergerea ultimei cifre.

Numărul inițial este N=10n, deci 9n=72504. 6p

Rezultă n=8056 și N=80560 3p

TOTAL: 10p

III. Se acordă din oficiu 1p

a) După cea de-a 3-a saritură broscuțele se găsesc pe pozițiile (4, 7, 12),
apoi pe pozițiile (7, 12, 20), (12, 20, 33),
iar după cea de-a a șasea pe pozițiile (20, 33, 54)
(se observă că dacă broscuțele ocupă pozițiile a, b, c, atunci c=a+b+1) 5p

b) Broscuța de pe primul loc se află pe axă în dreptul numărului 2583, care este impar. Observăm că după fiecare săritură numărul care indică poziția unei broscuțe pe axa numerelor crește cu un număr par, deci paritatea pozitiilor initiale nu se modifica pe parcurs (adică o broscuță se află în orice moment pe un număr de aceeași paritate cu cel de pe poziția inițială). Deoarece Oac este singura broscuță aflată la început pe o poziție impară, ea este broscuța de pe primul loc 4p

TOTAL: 10p

IV. Se acordă din oficiu 1p

a) Notăm cu b numărul băieților și cu f numărul fetelor.

Primul băiat aduce 4+1 flori, al doilea 4+2 flori, etc, iar ultimul 4+b flori, deci 4+b=f 3p

Cum b+f=148, rezultă că b=72, f=76 (3p)

b) Numărul de flori este 5+6+...+ 76 =81+81+...+81 (36 de termeni) $=36 \cdot 81 = (6 \cdot 9)^2$ 3p

TOTAL: 10p

NOTĂ: Orice altă soluție corectă se punctează echivalent !

BAREM DE CORECTARE-clasa a VI-a, 13.02.2010

I. Se acordă din oficiu ……………………………………………………………………… 1p

a) p=prim; $p>6 \Rightarrow u(p)\ \{1;3;7;9\}$……………………………………………… 1p

$u(p)=1 \Rightarrow u(p^4)=1$; $u(p)=3 \Rightarrow u(p^4)=1$; $u(p)=7 \Rightarrow u(p^4)=1$; $u(p)=9 \Rightarrow u(p^4)=1$ ………………… 2p

$\Rightarrow u(p^4)=1$ ……………………………………………………………………………… 0,5p

b) Cazul 1: $p>6$; $q>6 \Rightarrow$ nu avem soluții ……………………………………………… 0,5p

Cazul 2: $p<6$; $q<6 \Rightarrow$ nu avem solutii………………………………………………… 0,5p

Cazul 3: $p>6$; $q<6 \Rightarrow u(p^4)=1$; $u(29186)=6 \Rightarrow u(q^4)=5$ ……………………………… 1p

$q=$ prim $\Rightarrow q=5 \Rightarrow q^4=625$ ……………………………………………………………… 1p

$\Rightarrow p^4=28561$ …………………………………………………………………………… 0,5p

$\Rightarrow p^4=13^4$ ……………………………………………………………………………… 1p

$\Rightarrow p=13$ ……………………………………………………………………………… 1p

TOTAL: 10p

II. Se acordă din oficiu ………………………………………………………………………… 1p

Presupunem: $a=dx$ si $b=dy \Rightarrow (a,b)=d$ si $(x,y)=1$ ……………………………………… 1p

Relatia $[a,b]-(a,b)=34$ devine $dxy-d=34 \Rightarrow d(xy-1)=34$ …………………………………… 1p

$\Rightarrow d \in \{1;2;17;34\}$ ……………………………………………………………………… 1p

Pt. $d=1 \Rightarrow (a;b) \in \{(1;35),(35;1),(5;7),(7;5)\}$ ……………………………………………… 1,5p

Pt. $d=2 \Rightarrow (a;b) \in \{(2;36),(36;2),(4;18),(18;4)\}$ ……………………………………………… 1,5p

Pt. $d=17 \Rightarrow (a;b) \in \{(17;51),(51;17)\}$ …………………………………………………… 1,5p

Pt. $d=34 \Rightarrow (a;b) \in \{(34;68),(68;34)\}$ …………………………………………………… 1,5p

TOTAL:10p

III. Se acordă din oficiu……………………………………………………………………… 1p

Avem $A_1A_2=1$

$A_2A_3=\frac{3}{10}\cdot A_1A_2=\frac{3}{10}\cdot 1=\frac{3}{10}$ …………………………………………………… 0,5p

$A_3A_4=\frac{3}{10}\cdot A_2A_3=\left(\frac{3}{10}\right)^2$ …………………………………………………… 1p

$A_4A_5=\frac{3}{10}\cdot A_3A_4=\left(\frac{3}{10}\right)^3$ …………………………………………………… 0,5p

…

$A_nA_{n+1}=\frac{3}{10}\cdot A_{n-1}A_n=\left(\frac{3}{10}\right)^{n-1}$ ……………………………………………… 1p

$A_1A_2+A_2A_3+A_3A_4+A_4A_5+\ldots+A_nA_{n+1}=1+\frac{3}{10}+\left(\frac{3}{10}\right)^2+\left(\frac{3}{10}\right)^3+\ldots+\left(\frac{3}{10}\right)^{n-1}$ ……… 1p

Notăm $S=1+\frac{3}{10}+\left(\frac{3}{10}\right)^2+\left(\frac{3}{10}\right)^3+\ldots+\left(\frac{3}{10}\right)^{n-1}$ …………………………… 1p

$\frac{3}{10}S=\frac{3}{10}+\left(\frac{3}{10}\right)^2+\left(\frac{3}{10}\right)^3+\ldots+\left(\frac{3}{10}\right)^{n}$ …………………………………… 1p

$S-\frac{3}{10}S=1-\left(\frac{3}{10}\right)^n<1$ …………………………………………………… 1p

$\Rightarrow \frac{7}{10}S<1$ …………………………………………………………………… 1p

$\Rightarrow S<\frac{10}{7} \Rightarrow A_1A_2+A_2A_3+A_3A_4+A_4A_5+\ldots+A_nA_{n+1}<\frac{10}{7}$ ……………………………… 1p

TOTAL: 10p

IV. Se acordă din oficiu……………………………………………………………… 1p

a) justifică $\angle B \equiv \angle C$……………………………………………………… 0,5p

justifică $[AC] \equiv [BM]$……………………………………………………… 0,5p

$\Delta ACM \equiv \Delta MBN \Rightarrow [AM] \equiv [BM]$ ……………………………………………… 1p

finalizare……………………………………………………………………… 0,5p

b) justifică $m(\angle ACM)=m(\angle ABC)=45^0$……………………………………………… 0,5p

$\Rightarrow m(\angle QCM)=135^0$……………………………………………………… 0,5p

$[MC] \equiv [QC] \Rightarrow \Delta MCQ=\Delta$ isoscel……………………………………………… 1p

justifică $m(\angle CQM)=m(\angle CMQ)=22^0 30'$……………………………………………… 1p

$m(\angle CAM)=m(\angle NMB)=x \Rightarrow m(\angle MAN)=m(\angle MNA)=90^0-x$……………………… 1p

$\Rightarrow m(\angle MNB)=90^0+x$……………………………………………………… 0,5p

$m(\angle BMN)+m(\angle MNB)+m(\angle NBM)=180^0$……………………………………… 0,5p

$\Rightarrow m(\angle NMB)=22^0 30'$……………………………………………………… 0,5p

$\Rightarrow m(\angle NMB)=m(\angle CMQ) \Rightarrow BC \cup NQ=\{M\}$……………………………………… 0,5p

$\Rightarrow$ N,M,Q coliniare……………………………………………………………… 0,5p

TOTAL: 10p

BAREM DE CORECTARE – clasa a VII-a, 13.02.2010

I. Se acordă din oficiu …………………………………………………………………………. 1p

a) Dacă n = par, u.c. = u(9+4)=3 (1) …………………………………………………….. 1p

Dacă n , impar, U.C=u(1+6)=7 (2) ……………………………………………………..1p

Din (1) şi (2) => $19^{n+1}+74^{n+1}$ nu este pătrat perfect => a este irațional ………………..1p

b) $5x^3+2x^2y=2y^3+5xy^2 \Leftrightarrow (5x^3-5xy^2)+(2x^2y-2y^3)=0$

şi obține $(x^2-y^2)(5x+2y)=0$ ……………………………………………………………… 2p

Deduce $x^2-y^2=0 \Rightarrow y=\pm x$ ………………………………………………………………… 1p

sau $5x+2y=0 \Rightarrow y=-\dfrac{5x}{2}$ ……………………………………………………….. 1p

Analizează: $y=x\in\mathbf{R^*} \Rightarrow \dfrac{3x+4y}{4x+3y}=\ldots=1\in\mathbf{Z}$ ……………………………………… 0,5p

$y=-x\in\mathbf{R^*} \Rightarrow \dfrac{3x+4y}{4x+3y}=\ldots=-1\in\mathbf{Z}$ ………………………………… 0,5p

$y=-\dfrac{5x}{2}\in\mathbf{R^*} \Rightarrow \dfrac{3x+4y}{4x+3y}=\ldots=2\in\mathbf{Z}$ …………………………………… 1p

TOTAL 10p

II. Se acordă din oficiu ………………………………………………………………………. 1p

a) Din motive de simetrie, putem presupune că cel mai mic dintre numere este a.

Dacă $a\neq 0$, atunci $\dfrac{a}{b+c+d}\le\dfrac{a}{a+a+a}=\dfrac{1}{3}$, imposibil. Deci a = 0 . ………………….. 2p

Numerele $\dfrac{b}{c+d}$, $\dfrac{c}{d+b}$, $\dfrac{d}{b+c}$ trebuie să fie naturale …………………………………… 1p

Putem presupune că $b\le c$ şi $b\le d$. Dacă $b\neq 0$, atunci $\dfrac{b}{c+d}\le\dfrac{b}{b+b}=\dfrac{1}{2}$, imposibil. Deci b = 0 ……1p

Cum $\dfrac{c}{d}$ şi $\dfrac{d}{c}$ sunt naturale, trebuie ca $c=d\ (\neq 0)$. ………………………………………..1p

b) $\sqrt{2009\cdot 2010}<\sqrt{2010\cdot 2010}$ ……………………………………1p

$\sqrt{2009\cdot 2010+\sqrt{2009\cdot 2010+\sqrt{2009\cdot 2010}}}<\sqrt{2009\cdot 2010+\sqrt{2009\cdot 2010+\sqrt{2010\cdot 2010}}}$ 1p

$\sqrt{2009\cdot 2010+\sqrt{2009\cdot 2010+2010}}=\sqrt{2009\cdot 2010+\sqrt{2010\cdot 2010}}=\sqrt{2010\cdot 2010}=2010$ 2p

TOTAL 10p

III. Se acordă din oficiu ……………………………………………………………………. 1p

a) MN||BC, EF||MN iar $\dfrac{AE}{EB}=\dfrac{1}{3}=\dfrac{QE}{EC}$ => AQ||BC (1) ……………………………2p

Analog $\dfrac{AF}{FC}=\dfrac{RF}{FB}=\dfrac{1}{3}$ => AR||BC (2) ……… 2p Din (1) şi (2) => Q,A,R coliniare. ………1p

b) În triunghiul BEF, MD||EF => $\dfrac{BM}{ME}=\dfrac{BD}{DF}=\dfrac{2}{1}$ ....1p => BD = 2DF adică DF= $\dfrac{FB}{3}$ => DF=RF. ………2p

Analog HE=EQ, deci D - mijlocul lui [BR], iar H – mijlocul lui [CQ]. …………….. 1p

TOTAL 10p

IV. Se acordă din oficiu …………………………………………………………………. 1p

a) Notăm {O}=MT∩AR şi (EF) linie mijlocie în trapez.

În triunghiul OEF avem EF < OE+OF………………………………………………… 1p

EF=$\dfrac{MT+MA}{2}$ …… 1p OE=$\dfrac{RM}{2}$ şi OF=$\dfrac{TA}{2}$ …1p

=> RT+MA< RM+TA. ……………………………………………………………….. 1p

b) [RO] – înălțime şi bisectoare în ΔMRT ⇒ [MR] ≡ [RT] (1) ……………………. 1p

∠TRA ≡ ∠RAM (alt.int.) şi ∠TRA ≡ ∠ARM ⇒ ∠RAM ≡ ∠ARM ⇒ ΔAMR isoscel cu [RM] ≡ [AM] (2)……… ……………… 2p

Din (1) şi (2) ⇒ [RT] ≡ [MA] şi cum MA || RT ⇒ MATR este paralelogram ……. 1p $\overset{(1)}{\Longrightarrow}$ MATR este romb……………… 1p

TOTAL 10p

BAREM DE CORECTARE – clasa a VIII-a, 13.02.2010

I. Se acordă din oficiu ....1p **a)** Din inegalitatea $k^2 < k(k+1) < (k+1)^2, k \in \mathbf{N}^* \Rightarrow [\sqrt{k(k+1)}] = k$ 1p

Deci $n = 1 + 2 + \ldots + 2009 = \dfrac{2009 \cdot 2010}{2} = 2009 \cdot 1005$ 1p

$\dfrac{2\sqrt{11+6\sqrt{2}}}{(3x+2)(3+\sqrt{2})} = \dfrac{2(3+\sqrt{2})}{(3x+2)(3+\sqrt{2})} = \dfrac{2}{3x+2}$ 1p

$3x+2 \mid 2 \Rightarrow A = \{0, -1\} \Rightarrow$ cardA = 2...1p

$2^{2009 \cdot 1005} > 2^{42} = (2^{11} \cdot 2^{10})^2 = (2048 \cdot 1024)^2 > (2009 \cdot 1005)^2 \Rightarrow m^n > n^m$ ….1p

b) Notăm $6n + 7 = k^2$ şi $9n + 1 = (k + 1)^2$, $k \in \mathbf{Z}$. $\Rightarrow n = \dfrac{k^2 - 7}{6}$, respectiv $n = \dfrac{(k+1)^2 - 1}{9}$ .1p

$\Rightarrow \dfrac{k^2 - 7}{6} = \dfrac{(k+1)^2 - 1}{9} \Leftrightarrow k^2 - 4k - 21 = 0$ ……………………………………. 1p

Din $(k - 7)(k + 3)=0$ obține soluțiile $k \in \{-3; 7\}$ …1p Pentru $k = -3$ se obține $n \notin \mathbf{N}$ (nu convine condiției din enunț) …. 0,5p
Pentru $k = 7$ se obține $n = 7$ … …..…………………………………...……. 0,5p

TOTAL 10p

II. Se acordă din oficiu ....1p **a)** $a = \sqrt{20+\sqrt{20+\sqrt{20+\sqrt{20}}}} < \sqrt{20+\sqrt{20+\sqrt{20+\sqrt{25}}}} =$

$= \sqrt{20+\sqrt{20+\sqrt{25}}} = \sqrt{20+\sqrt{25}} = \sqrt{25} = 5$ ………………………...2p

$b = \sqrt{30+\sqrt{30+\sqrt{30+\sqrt{30}}}} < \sqrt{30+\sqrt{30+\sqrt{30+\sqrt{36}}}} =$

$= \sqrt{30+\sqrt{30+\sqrt{36}}} = \sqrt{30+\sqrt{36}} = \sqrt{36} = 6$ ………………………… 2p $\Rightarrow a + b < 11$ ………1p

b) $x + 2y = 5 \Rightarrow x = 5 - 2y$ 1p

$E(x,y) = (5-2y)^2 + y^2 = 25 - 20y + 5y^2 = \; = 5(5 - 4y + y^2) = 5[1 + (2-y)^2]$ …..2p

min E(x,y) = 5 (şi se obține pentru y = 2 şi x = 1) ………………………..1p

TOTAL 10p

III. Se acordă din oficiu ....1p Desen 1p

a) Fie M' – mijlocul laturii [BC]. Atunci $\dfrac{M'G_1}{M'A} = \dfrac{M'G_2}{M'D} = \dfrac{1}{3}$ ………………...2p

Din reciproca teoremei lui Thales in $\Delta M'AD \Rightarrow G_1G_2 \parallel AD$ ……………1p

b) Prin metoda reducerii la absurd (sau cu lema "acoperişului") arată că

$d \parallel G_1G_2 \parallel AD$ ……… 2p $M \notin (ABC), M \in d \Rightarrow d \not\subset (ABC)$ ….1p

Din d || AD şi $AD \subset (ABC) \Rightarrow d \parallel (ABC)$ ……………………………… 2p

TOTAL 10p

IV. Se acordă din oficiu ....1p Desen 1p

a) Dacă $BM \perp AC, M \in (AC) \Rightarrow$ din teorema celor 3 perpendiculare $B'M \perp AC$.

Dacă $BQ \perp B'M$, conform reciprocei a doua a teoremei celor 3 perpendiculare

$\Rightarrow BQ \perp (AB'C) \Rightarrow BQ = d[B,(AB'C)]$ .2p

$AC = \sqrt{a^2+b^2}, BM = \dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}, B'M = \dfrac{\sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ……… 1p

$\Rightarrow BQ = \dfrac{abc}{\sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}}$ ………………………………………………1p

b) $[A'O_1] \equiv [DO_2] \equiv [C'O_3] \Leftrightarrow b^2 + \dfrac{a^2+c^2}{4} = a^2 + \dfrac{b^2+c^2}{4} = c^2 + \dfrac{a^2+b^2}{4}$

$\Leftrightarrow a = b = c \Leftrightarrow$ paralelipipedul este cub (1)..2p $BD' = \sqrt{ab+ac+bc} \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2 = ab+bc+ca$

$\Leftrightarrow a = b = c \Leftrightarrow$ paralelipipedul este cub (2)… 1p Cele două afirmații sunt echivalente din (1) şi (2)......................1p

TOTAL 10p