Inspectoratul Şcolar Judeţean Arad

Olimpiada de Matematică

Etapa locală – 12.02.2011

Clasa a V-a

1. De câte ori se foloseşte cifra 5 în scrierea numerelor mai mici decât 100? Dar cifra zero?
2. Comparaţi numerele $a = 160^{552}$ şi $b = 2009^{368}$.
3. Într-un acvariu sunt peşti mici, mijlocii, mari şi un peşte uriaş. Fiecare peşte mijlociu înghite 5 peşti mici, fiecare peşte mare înghite 6 peşti mijlocii, iar peştele uriaş înghite 7 peşti mari. Câţi peşti a înghiţit în total peştele uriaş?
4. Împărţind numărul 5577 la numărul natural nenul a, se obţine câtul b şi restul 11. Împărţindu-l pe b la a, se obţine câtul 11 şi restul 11.

   a) Să se arate că b se împarte exact la 11.
   b) Aflaţi numărul a.

Notă:
- *Toate subiectele sunt obligatorii.*
- *Se acordă 10 puncte pentru fiecare problemă, din care 1 punct din oficiu.*
- *Timp de lucru: 2 ore*

Inspectoratul Şcolar Judeţean Arad

Olimpiada de Matematică

Etapa locală – 12.02.2011

Clasa a VI-a

1. Găsiţi cifrele x şi y, astfel încât numărul $\overline{21x7y}$ să fie divizibil cu 3 şi 5.

2. a) Arătaţi că $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$ şi $\dfrac{1}{n^2} < \dfrac{1}{(n-1)\cdot n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

   b) Dacă $A = \dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \dfrac{1}{9\cdot 10}$ şi $B = \dfrac{1}{1^2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \ldots + \dfrac{1}{10^2}$,

   atunci B-A < 1.

3. Fie numerele raţionale x, y, z, astfel încât să aibă loc egalitatea:

$$\frac{x}{x+y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x} = 1.$$

   a) Să se arate că nici unul dintre numere nu poate fi egal cu zero.

   b) Să se arate că $\dfrac{y}{x+y} + \dfrac{z}{y+z} + \dfrac{x}{z+x} = 2.$

4. Fie unghiurile adiacente $\sphericalangle A_1OA_2$, $\sphericalangle A_2OA_3$, $\sphericalangle A_3OA_4$, …, $\sphericalangle A_{15}OA_{16}$ având măsurile egale cu $1^\circ, 2^\circ, \ldots, 15^\circ$.

   a) Determinaţi măsura unghiului $\sphericalangle A_1OA_{16}$.

   b) Fie [OM bisectoarea unghiului A_1OA_4 şi [ON bisectoarea unghiului $A_{13}OA_{16}$. Determinaţi măsura unghiului $\sphericalangle MON$.

Notă:

- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Se acordă 10 puncte pentru fiecare problemă, din care 1 punct din oficiu.
- Timp de lucru: 2 ore

Inspectoratul Şcolar Judeţean Arad

Olimpiada de Matematică

Etapa locală – 12.02.2011

Clasa a VII-a

1. Care este soluţia în **Q** a ecuaţiei:

$$\left(\frac{1}{33}+\frac{1}{303}+\ldots+\frac{1}{\underbrace{300\ldots03}_{\text{n zerouri}}}\right)\cdot x=\frac{1}{11}+\frac{1}{101}+\ldots+\frac{1}{\underbrace{100\ldots01}_{\text{n zerouri}}}.$$

2. Aflaţi numărul natural $\overline{abc}$, scris în baza 10, ştiind că:

$$10\cdot\left(\frac{\overline{ab}}{c}-1\right)+\frac{\overline{bc}}{a}=82.$$

3. În triunghiul ΔABC, $E, F \in (BC)$ astfel încât $BE = EF = FC$, CM mediana, $M \in (AB)$, $CM \cap AF = \{N\}$, $BN \cap ME = \{P\}$. Arătaţi că $MP = 3 \cdot PE$.

4. Fie ABC un triunghi echilateral, $D \in BC$, astfel încât $[DC] \equiv [BC]$ şi $E \in AC$ astfel încât $[AE] = [AC]$. Dacă $DE \cap AB = \{F\}$, arătaţi că $AB = 3\ AF$.

Notă:

- Toate subiectele sunt obligatorii.

- Fiecare subiect este notat de la 0 la 7 puncte.

- Timp de lucru: 3 ore

Inspectoratul Şcolar Judeţean Arad

Olimpiada de Matematică

Etapa locală – 12.02.2011

Clasa a VIII-a

1. Comparaţi numerele $\mathbf{a} = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \ldots + \sqrt{51}$ şi $b = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} \ldots + \sqrt{52}$.

2. Aflaţi cardinalul mulţimii $A = \left\{n \in N \middle| \sqrt{n^2 + 3n + 1} \in N\right\}$.

3. Arătaţi că numărul $a = 9002010 \cdot 9002011 \cdot 9002012 \cdot 9002013 + 1$ este pătrat perfect.

4. Segmentele [AB] şi [CD] sunt situate pe drepte necoplanare, M este mijlocul segmentului [AB], iar $N \in [CD]$ astfel încât $CN = 3 \cdot ND$. Notăm cu X, Y, Z, T punctele $X \in [CM]$ cu $3 \cdot MX = XC$, $Y \in [AN]$ cu $AN = 2 \cdot AY$, $Z \in [MD]$ cu $MZ = 3 \cdot ZD$, $T \in [BN]$ cu $BN = 2 \cdot BT$. Justificaţi coplanaritatea punctelor X, Y, Z, T.

Notă:

- *Toate subiectele sunt obligatorii.*
- *Fiecare subiect este notat de la 0 la 7 puncte.*
- *Timp de lucru: 3 ore*