Al VII-lea Concurs Naţional de Matematică "Alexandru Myller"
28 Martie 2009

CLASA a VII-a

Problema 1. Determinaţi $n \in \mathbb{N}^*$ cu proprietatea că $n! + 3 \cdot 2^n = 6^{n-2}$, unde $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$.
Artur Bălăucă

Problema 2. Fie triunghiul ABC şi punctul D situat pe latura $[BC]$. Arătaţi că:

$$AB \cdot DC + AC \cdot BD \geq AD \cdot BC.$$

***

Problema 3. Fie p un număr natural impar. Se ştie că oricare divizor al lui p are ultima cifră diferită de 3 şi 7. Să se arate că numărul $5p + 1$ nu este pătrat perfect.
Mircea Fianu

Problema 4. Fie triunghiul echilateral ABC şi punctul D situat pe latura (AC). Bisectoarea unghiului $\angle ABD$ intersectează paralela prin A la dreapta BC în punctul E. Arătaţi că $AE + DC = BD$.
Cristian Lazăr

CLASA a VIII-a

Problema 1. Fie un tetraedru regulat cu muchia de lungime 3. Pe suprafaţa acestuia se consideră 37 de puncte. Arătaţi că printre aceste puncte există două astfel încât distanţa dintre ele este cel mult egală cu 1.
***

Problema 2. Determinaţi perechile de numere $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ care verifică egalitatea

$$2(a+b)^2 + 3(a+b) + ab + 4 = 0.$$

Petru Răducanu

Problema 3. Fie $a \geq b \geq c \geq d \geq 0$ astfel încât $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$. Să se arate că $a + b \geq 1 \geq c + d$.
Gheorghe Iurea

Problema 4. Numim *piramidă Myller* o piramidă $SABCD$ cu baza $ABCD$ care are $SA = SB = SC = SD$, $\angle ASB \equiv \angle ASD$ şi $\angle BSC \equiv \angle DSC$ iar lungimile $SA, AB, BC, CD, DA, AC, BD$ sunt numere naturale nenule. Aflaţi piramida Myller de volum minim.
Cristian Lazăr