Concursul Național de matematică ARHIMEDE

Etapa a II-a, 28 februarie 2009

Clasa a III-a

1. Calculați:
   (3p) a) $(24:3+6:3):5\times 2=$
   (3p) b) $(24:3+6:3):(5\times 2)=$
   (3p) c) Aflați pe a din relația:
   $(a:5+16):8=9:3$

2. a) Completați "căsuțele" cu semnele operațiilor aritmetice învățate $(+,-,\times,:)$ pentru a face adevărate relațiile.Puteți folosi și paranteze, acolo unde este cazul.
   (2p) $3\ \square\ 3\ \square\ 3\ \square\ 3=10$
   (2p) $5\ \square\ 5\ \square\ 5\ \square\ 5=\ 5$
   (2p) $9\ \square\ 9\ \square\ 9\ \square\ 9=\ 7$
   b) (3p) Tatăl are acum 36 de ani iar fiul 8 ani. Peste câți ani vârsta tatălui va fi de 3 ori mai mare decât a fiului?

3. (5p) a)Triplul unui număr întrece jumătatea sa cu 100. Care este numărul?
   (4p)b)Găsiți toate numerele de 2 cifre care sunt de 4 ori mai mari decât suma cifrelor lor.

4. (6p) a) Din coșul plin cu mure, Scufița Roșie ia o treime din numărul total și încă două mure. Vine bunica și ia o jumătate din câte au mai rămas în coș și încă două mure. Mama vine ultima și ia și ea un sfert din câte au mai rămas în coș și încă o mură. Dupa asta, Scufița Roșie constată că în coș mai sunt 5 mure.
   Câte mure erau la început în coș?
   (3p) b)Doar cinci numere din șirul următor respectă regula de alcătuire a șirului. Care este "intrusul", adică numărul care nu respectă regula? Justificați!
   38; 46; 324; 62; 164; 83

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se notează de la 1 la 10p. La fiecare subiect se acordă un punct din oficiu. Timpul de lucru : 2 ore și 30 minute.

Concursul Național de matematică ARHIMEDE

Etapa a II-a, 28 februarie 2009

Clasa a IV-a

1. Calculați:

(5p) a) $20 + 19 - 18 - 17 + 16 + 15 - 14 - 13 + 12 + 11 - 10 - 9 =$

(4p) b) $97 + 19 \times 19 : 19 + 386 - 386 \times 0 =$

2. (5p) a) Aflați necunoscuta x din egalitatea:
   $24 : \{66 - 5 \cdot [(x - 7 \cdot 6) : 9]\} = 24$
   b) Puneți semnele operațiilor aritmetice $(+;\ -;\ \times;\ :)$ și paranteze ,dacă este cazul, pentru a face adevărate relațiile:
   (2p) $8\ \ 8\ \ 8\ \ 8 = 10$
   (1p) $6\ \ 6\ \ 6\ \ 6 = 1$
   (1p) $6\ \ 6\ \ 6\ \ 6 = 2$

3. (3p) a) Din suma a 7 numere consecutive impare scădem suma numerelor pare ce se afla între ele și se obține 105. Aflați numerele.
   (6p) b) 5 kg de portocale, 9 kg de mandarine și 7 kg de banana costă 86 lei. 8 kg de portocale, 4 kg de mandarine și 6 kg de banane costă 70 lei, iar 1 kg de portocale, 1 kg de mandarine și 11 kg de banane costă 62 lei. Aflați prețul fiecărui kg de fructe.

4. a) (5p) De ziua ei, Andra vrea să servească invitații cu prăjituri. Ea gândește: "Dacă aș mai avea 7 prăjituri, aș putea oferi fiecărui invitat câte 3. Dacă ar fi cu o prăjitură mai puțin, abia ar ajunge la jumătate din invitați câte 2 prăjituri".
   Câți invitați și câte prăjituri erau?
   b) (4p) Lanțul de la fântână s-a rupt în 7 bucăți: 4 a câte 8 zale și 3 a câte 5 zale. Meșterul satului face o lipitură în 20 secunde și o tăietură in 15 secunde. Care este timpul minim de a repara lanțul? (Precizăm că zalele rupte s-au pierdut și pentru repararea lanțului trebuie folosite zale din bucățile existente).

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se notează de la 1 la 10p. La fiecare subiect se acordă un punct din oficiu. Timpul de lucru : 2 ore și 30 minute.

Concursul Național de matematică ARHIMEDE

Etapa a II-a, 28 februarie 2009

Clasa a V-a

1. Calculați:

(3p) a) $(7^2 + 6^2 + 5^2) : (4^2 - 3^2 + 2^2 - 1^2)$

(3p) b) $[(5^4)^9 : 5^{2^5} - 25] : 5$

(3p) c) $10^5 - 9 \cdot 10^4 - 9 \cdot 10^3 - 9 \cdot 10^2 - 9 \cdot 10 - 9$

***

2.(4p) a) Arătați că numărul

$N = 5^2 + 5^3 + 5^4 + \cdots + 5^{2009}$

este divizibil cu 100.

A.Doboșan

(5p) b) Se consideră mulțimile :

$A = \{\overline{xyzt} | \overline{xyzt} = 100\overline{xy} + 9\}$ și $B = \{\overline{abcd} | \overline{abcd} = 69 \cdot \overline{ad} + 10c + 8\}$

Determinați cardinalul mulțimii A, apoi calculați $A \cap B$.

Julietta Georgescu

3.(4p)a) Să se arate că oricum am alege 13 numere din mulțimea A={1, 2, 3, ..., 24}, printre ele există cel puțin două a căror diferență este 4.

Niculaie Marin Goșoniu

(5p)b) Să se determine numărul $\overline{abcd}$ știind că dacă împărțim numărul 2009 la numărul $\overline{aa}$ obținem câtul $\overline{bb}$ și restul $\overline{cd}$.

Traian Preda

4.(4p) a) Să se arate că numărul $2222^{5555} + 5555^{2222}$ se divide cu 7.

Liviu Oprișescu

(5p) b) Un număr natural cu 2009 cifre, are toate cifrele egale cu 5, în afară de una. Să se arate că numărul nu poate fi pătrat perfect.

Liviu Oprișescu

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se notează de la 1 la 10p. La fiecare subiect se acordă un punct din oficiu. Timpul de lucru : 3 ore.

Concursul Național de matematică ARHIMEDE

Etapa a II-a, 28 februarie 2009

Clasa a VI-a

1. Calculați:

(3p) a) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}$

(3p) b) $\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)$

(3p) c) $\frac{16^{19}+8^{13}}{32^{14}+8^{11}}$

2. (4p)a) Să se determine numerele $\overline{abc}$ cu proprietatea că $\overline{abcabc}$ se divide la 2009.

Traian Preda

(5p)b) Pentru $n \in \mathbb{N}$ notăm cu S_1 suma primelor n numere naturale divizibile cu 3, iar cu S_2 suma primelor n numere naturale care împărțite la 4 dau restul 3. Să se determine numerele naturale n știind că S_2 se divide cu S_1.

Traian Preda, Cristian Olteanu

3. Se consider unghiurile $\sphericalangle A_1OA_2, \sphericalangle A_2OA_3, \sphericalangle A_3OA_4, \dots, \sphericalangle A_nOA_{n+1}$, adiacente două câte două, care au respectiv măsurile $\frac{1}{3}\cdot 140°, \frac{1}{15}\cdot 140°, \frac{1}{35}\cdot 140°, \dots, \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\cdot 140°$

(4p) a) Să se calculeze măsurile unghiurilor $\sphericalangle A_2OA_4$ și $\sphericalangle A_1OA_5$.

(5p) b) Să se determine $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $m(\sphericalangle A_1OA_{n+1}) = 69°20'$

Niculaie Marin Goșoniu

4. (4p)a) Fie p și q două numere prime mai mari decât 3. Folosind, eventual, relația : $(p+q)(p-q) = p^2 - q^2$, să se arate că $p^2 - q^2$ se divide cu 24.

Liviu Oprișescu

(5p)b)Să se arate că oricum alegem 1006 numere naturale diferite, nedepășind 2009, se pot alege trei numere astfel ca suma a două din ele să fie egală cu al treilea.

Liviu Oprișescu

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se notează de la 1 la 10p. La fiecare subiect se acordă un punct din oficiu. Timpul de lucru : 3 ore.

Concursul Național de matematică ARHIMEDE

Etapa a II-a, 28 februarie 2009

Clasa a VII-a

1. Să se calculeze :
   (3p) a) $\sqrt{1+3+5+7+9+11+13+15}$
   (3p) b) $\sqrt{16^2+4^3+2^2}$
   (3p) c) $\frac{a}{b}=\cdots$ dacă $\frac{2a-3b}{a-4b}=\sqrt{\frac{3,5+0,(6)}{0,5-0,(3)}}$
2. (4p) a) Determinați cel mai mic număr natural n pentru care

   $$\frac{9^{3n+2}+27^{2n+1}-3^{6n+1}}{3^{2006}-3^{2005}-3^{2004}}$$

   să fie număr natural.

   Vasile Tarciniu

   (5p) b) Se consideră mulțimea: A={1,2,...,n}, $n\in\mathbb{N}^*$. Notăm cu S_1 suma elementelor lui A divizibile cu 3 și cu S_2 suma elementelor lui A care împărțite la 4 dau restul 1. Să se determine n știind că $S_1=S_2$.

   Traian Preda, Cristian Olteanu
3. (4p) a) Pe laturile [AB], [AC] ale triunghiului ABC, se iau, respectiv, punctele M și N astfel încât $MN \parallel BC$. Prin mijlocul D al segmentului [BN] , se construiește paralela DE la dreapta MC, $E\in[BC]$. Știind că $NE\perp BC$, demonstrați că $\Delta\ ABC$ este isoscel.

   Dan Nedeianu

   (5p) b) Pe ipotenuza [BC] a triunghiului dreptunghic ABC se consideră punctul D.

   Demonstrați inegalitatea: min $(BD,DC)\le AD\le$ max (DB,DC)

   Gheorghe Stoica
4. (9p) Punctul E situat în interiorul pătratului ABCD este egal depărtat de dreptele AD și BC, iar N și P sunt picioarele perpendicularelor duse din E pe dreptele BC respective CD. Să se arate că dreptele AE, BP și DN sunt concurente.

   Ștefan Smarandache

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se notează de la 1 la 10p. La fiecare subiect se acordă un punct din oficiu. Timpul de lucru : 3 ore.

Concursul Național de matematică ARHIMEDE

Etapa a II-a, 28 februarie 2009

Clasa a VIII-a

1. Fie $a = \sqrt{7 + 4\sqrt{3}}$ și $b = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$. Calculați:
   (4p) a) $a \cdot b$ și $a^2 + b^2$
   (2p) b) $(a + b)^4$
   (3p) c) $\frac{a+b}{a-b} + \frac{a-b}{a+b}$
2. (4p) a) Rezolvați în $\mathbb{N}$ ecuația:
   $\frac{1}{2y-3} = \frac{4}{x+y^2}$

   Vasile Tarciniu

   (5p) b) Determinați numărul $a \in \mathbb{Z}$ astfel încât numărul $(x - a)(x - 10) + 1$ să se descompună într-un produs de forma $(x + b)(x + c)$, cu $b, c \in \mathbb{Z}$,$\forall x \in \mathbb{R}$.

   Liviu Oprişescu
3. (3p) a) Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub. Să se afle măsura unghiului dintre dreapta BC' și planul $(BB'D)$.
   (6p) b) Să se demonstreze că dacă $ABCDA'B'C'D'$ este un paralelipiped dreptunghic și $\sphericalangle\left(BC'; (BB'D)\right) \equiv \sphericalangle\left(AB'; (ABC')\right) \equiv \sphericalangle(BD; (A'BC))$ atunci $ABCDA'B'C'D'$ este cub.

   Traian Preda
4. (9p) Se dau în spațiu două segmente necoplanare [AC] și [BD], fiecare de lungime 1. Demonstrați că cel puțin unul din segmentele [AB], [BC], [CD] și [DA] nu este mai mic decât $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

   Liviu Oprişescu

<u>*Notă*</u>: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se notează de la 1 la 10p. La fiecare subiect se acordă un punct din oficiu. Timpul de lucru : 3 ore.