BACALAUREAT 1998
SESIUNEA IUNIE
Varianta 1

Profilul matematică - fizică, informatică, metrologie

SUBIECTUL I

Se consideră funcția $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x(x-1)} + \sqrt{x(x+1)}$.

1. Să se determina domeniul maxim de definiție D, domeniul de continuitate și domeniul de derivabilitate pentru funcția f.

2. Să se reprezinte grafic funcția f (fără derivata de ordinul al doilea).

3. Să se afle aria subgraficului funcției f pe intervalul $[2, 3]$.

SUBIECTUL II

1. Să se rezolve sistemul $\begin{cases} 4^{\frac{x}{y}} \cdot 4^{\frac{y}{x}} = 32 \\ \log_3(x-y) = 1 - \log_3(x+y) \end{cases}$.

2. Se consideră $G = (-1, \infty)$. Pentru x, $y \in G$ se definește legea $x \star y = xy + ax + by$, unde a, $b \in \mathbb{R}$. Să se determine a, $b \in \mathbb{R}$ astfel încât "$\star$" săfie lege de compoziție pe G și $(G, \star)$ să fie grup abelian.

3. Să se rezolve ecuația $6x^4 + 35x^3 + 62x^2 + 35x + 6 = 0$.

SUBIECTUL III

Se consideră punctele $A(1, 1)$, $B(2, 3)$ și dreapta $d : x - 4y + 7 = 0$. Să se determine coordonatele punctului $C \in d$, astfel încât triunghiul $\triangle ABC$ să fie isoscel cu baza (AB). Să se scrie ecuația înălțimii din C.

Varianta 2

Profilul matematică - fizică, informatică, metrologie

SUBIECTUL I

1. Se consideră x_1, x_2, x_3 rădăcinile ecuației $x^3+3x^2-9x+m=0$, $m\in\mathbb{R}$, și determinantul $\Delta=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$.

Să se calculeze determinantul Δ în funcție de parametrul real m. Să se determine m astfel încât $m+1+\sqrt{m+1}=\frac{1}{18}\Delta$.

2. Se consideră mulțimea $M=\left\{ A_x=\begin{pmatrix} 1-x & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 1-x \end{pmatrix} \middle| \, x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}\right\}$.

Să se demonstreze că înmulțirea matricelor este lege de compoziție internă pe M și că $(M,\cdot)$ este grup abelian.

SUBIECTUL II

1. Se consideră funcția f definită prin $f(x)=2\arctan x-\arcsin\frac{2x}{1+x^2}\cdot$

Să se determine domeniul maxim de definiție D și domeniul de derivabilitate pentru funcția f. Să se precizeze dacă există intervale pe care f este constantă (precizați constanta).

2. Se consideră funcția $f:\left(-\infty,\frac{3}{2}\right)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\sqrt{3-2x}$.

Să se determine numerele a, b, c astfel încât funcția $F:\left(-\infty,\frac{3}{2}\right)\to\mathbb{R}$, $F(x)=(ax^2+bx+c)\sqrt{3-2x}$ să fie o primitivă a funcției f.

SUBIECTUL III

Se consideră cercul de ecuație $x^2+y^2-6x+3y-5=0$. Să se determine coordonatele centrului și raza acestui cerc. Să se scrie ecuația tangentei la cerc în punctul $A(-1,-2)$. Să se precizeze poziția punctului $B(0,-4)$ față de cerc.

Varianta 3

Profilul matematică - fizică, informatică, metrologie

SUBIECTUL I

1. Diferența dintre coeficientul binomial al celui de al treilea termen și coeficientul binomial al celui de al doilea termen al dezvoltării $\left(\frac{1}{\sqrt[8]{x}}+x^{\lg x}\right)^n$ este 27. Pentru ce valori ale lui x, al doilea termen este 900?

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$. Să se precizeze dacă există și sunt unici coeficienții a, b, c, d, e astfel încât să fie îndeplinite condițiile:

- graficul să treacă prin punctele $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(-1,-6)$, $C(2,12)$;
- tangenta la grafic în punctul A să aibă panta egală cu -5.

În caz afirmativ, să se determine acești coeficinți.

SUBIECTUL II

1. Se consideră funcția $f:D\to\mathbb{R}$, $f(x)=-2x+\sqrt{3(x^2-1)}$.

a) Să se determine domeniul maxim de definiție D și să se studieze monotonia funcției f.

b) Să se afle asimptotele la graficul funcției.

2. Pentru $a>0$ se notează $I(a)=\int_0^a \frac{x}{(x+1)(x^2+4)}\,dx$. Să se calculeze $I(a)$ și $\lim_{a\to\infty} I(a)$.

SUBIECTUL III

Se consideră triunghiul $\triangle ABC$ determinat de următoarele drepte:

$$\begin{aligned}(AB):&\quad x+2y-4=0\\(BC):&\ 3x+\ \ y-2=0\\(AC):&\quad x-3y-4=0.\end{aligned}$$

a) Să se determine coordonatele punctului A.

b) Să se scrie ecuația înălțimii din A.

c) Să se afle aria triunghiului ABC.

Varianta 4

Profilul matematică - fizică, informatică, metrologie

SUBIECTUL I

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R}\backslash\{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2 + ax + b}{x - 1}$.

a) Să se determine a și b astfel încât funcția să admită un extrem egal cu 1 în punctul de abscisă 0.

b) Pentru $a = 1$ și $b = -1$, reprezentați graficul funcției $g = f'$.

2. **a)** Să se demonstreze că $e^x \geq x + 1$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

b) Arătați că $\dfrac{1}{e} \leq \displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}\, dx \leq \dfrac{\pi}{4}$.

SUBIECTUL II

1. Să se rezolve sistemul $\begin{cases} 3^{\lg x} = 4^{\lg y} \\ (4x)^{\lg 4} = (3y)^{\lg 3} \end{cases}$.

2. Se consideră matricea $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$, $A = \begin{pmatrix} 0 & m & 1 \\ m & -2 & 0 \\ 1 & -1 & m \end{pmatrix}$.

a) Pentru ce valori complexe ale lui m matricea A este inversabilă?

b) Pentru $m = 2$ să se determine inversa matricei A.

c) Să se demonstreze că, dacă $m = 0$, atunci $A^k \neq O_3$, pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$.

3. Pe $\mathbb{R}$ se definește legea $x \star y = ax + ay + bxy + c$, a, b, $c \in \mathbb{R}$. Să se determine a, b și c pentru care $e = -4$ este element neutru și orice $x \neq -5$ este simetrizabil.

SUBIECTUL III

Să se determine simetricul punctului $A(1, 2)$ față de dreapta de ecuație $2x = y + 4$.

Varianta 5

Profilul matematică - fizică, informatică, metrologie

SUBIECTUL I

Se consideră matricele $A,\ B \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}),\ A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Să se demonstreze că $A^2 = 3A$ și $AB = BA$.

2. Să se determine A^n și B^n pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

3. Dacă $C = 3A - 3B$, să se calculeze C^3.

SUBIECTUL II

Se consideră familia de funcții $f_m : \mathbb{R}\backslash\{m\} \to \mathbb{R},\ f_m(x) = \dfrac{(2m-1)x+m}{x-m}$, unde m este un parametru real nenul. Se notează cu H_m graficul funcției f_m.

1. Să se reprezinte graficul funcției f_1.

2. Să se demonstreze că, pentru orice m, graficele H_m trec printr-un punct fix.

3. Să se arate că, pentru orice m, există un punct situat pe H_m a cărui tangentă este paralelă cu tangenta la grafic în $A(0,-1)$.

SUBIECTUL III

Se consideră polinomul $f \in \mathbb{R}[X],\ f = X^3 + X^2 + aX + b$. Să se determine a și b, știind că restul împărțirii polinomului $f(X-3)$ la $X-1$ este -4 și rădăcinile ecuației $f(x) = 0$ satisfac relația $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 9$.

SUBIECTUL IV

Se consideră funcțiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = -x^2 + 5$ și $g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R},\ g(x) = \dfrac{4}{x^2}\cdot$

1. Să se determine punctele de intersecție ale graficelor celor două funcții și să se rezolve inecuația $g(x) \leq f(x)$.

2. Să se calculeze aria suprafeței cuprinse între graficele celor două funcții și dreptele $x = 1$, $x = 2$.

Varianta 6

Profilul matematică - fizică, informatică, metrologie

SUBIECTUL I

1. Să se rezolve ecuația $4^x + 2^{x+1} \cdot 3^x = 3 \cdot 9^x$.

2. Se consideră mulțimea $G = (2, \infty)$ pe care se definește legea $x \star y = xy - 2x - 2y + 6$, pentru orice x, $y \in G$. Să se demonstreze că "$\star$" este lege de compoziție pe G și că $(G, \star)$ este grup abelian. Să se arate că funcția $f : \mathbb{R} \to (2, +\infty)$, $f(x) = e^x + 2$, este un izomorfism între grupurile $(\mathbb{R}, +)$ și $(G, \star)$.

3. Să se discute după parametrul real m și să se rezolve sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} x + y + mz = 1 \\ x + my + z = 1 \\ mx + y + z = 1 \end{cases}.$$

SUBIECTUL II

1. Se consideră funcția definită prin $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + (m-2)x - m + 2}$, unde m este un parametru real.

a) Se cere să se determine mulțimea valorilor lui m pentru care domeniul de definiție al funcției coincide cu domeniul de derivabilitate.

b) Pentru $m = 3$ să se reprezinte grafic funcția obținută.

2. Se consideră șirul $a_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x \, dx$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Fără a calcula integrala, să se arate că șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este monoton și mărginit.

b) Să se arate, folosind integrarea prin părți, că $a_n = \dfrac{2n-1}{2n} a_{n-1}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

c) Să se calculeze I_3.

SUBIECTUL III

Să se determine ecuația cercului ce trece prin punctele $A(-1, 5)$, $B(-2, -2)$ și $C(5, 5)$, precizând coordonatele centrului și lungimea razei acestui cerc.

Varianta 7

Profilul matematică - fizică, informatică, metrologie

SUBIECTUL I

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} x \quad\quad + mz = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \\ 2x - y + 2z = 0 \end{cases}$ în necunoscutele x, y, z, unde m este un parametru real. Să se determine m astfel încât sistemul să admită numai soluția banală.

2. Se consideră matricele A, B, $C \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} m & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, unde $m \neq \frac{5}{4}$. Să se demonstreze că, pentru x_1, x_2, $x_3 \in \mathbb{R}$, avem $x_1A + x_2B + x_3C = O_2$ dacă și numai dacă $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

SUBIECTUL II

În mulțimea numerelor complexe se consideră următoarele ecuații:

$$z^3 - 3iz^2 - 3z + 8 + i = 0 \tag{1}$$

și

$$z^3 + 8 = 0 \tag{2}$$

1. Arătați că z_0 este soluția ecuației (1) dacă și numai dacă $z_0 - i$ este soluția ecuației (2).

2. Să se rezolve ecuațiile date.

SUBIECTUL III

Se consideră sistemul cartezian de coordonate xOy și punctele $A(3,0)$, $B(0,2)$, $M(3,-3)$, respectiv $N(-2,2)$. Să se demonstreze că dreptele AN, BM și perpendiculara din O pe AB sunt concurente.

SUBIECTUL IV

Să se calculeze integrala $\int_0^1 \ln(1+x^2)\, dx$ și limita șirului

$$a_n = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n-1} \ln(k^2+n^2) - 2(n-1)\ln n\right), \ n \in \mathbb{N}^*.$$

SUBIECTUL V

Se consideră funcția $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^x}{x+2}$.

1. Să se determine funcțiile f' și f''.

2. Să se demonstreze că, pentru orice $x \in [0,1]$, $f''(x) > 0$ și $f'(x) \leq \frac{2}{9}e$.

3. Să se arate că ecuația $f(x) = x$ are soluție unică pe intervalul $[0,1]$.

Varianta 8

Profilul matematică - fizică, informatică, metrologie

SUBIECTUL I

Se consideră sistemul (S) cu a, b, c parametri reali:

$$(S) \qquad \begin{cases} x+y+z=0 \\ (b+c)x+(a+c)y+(a+b)z=0 \\ bcx+acy+abz=0 \end{cases} .$$

1. Să se determine condiția ca (S) să admită numai soluția banală.

2. Fie polinoamele f, g, $h \in \mathbb{R}[X]$, $f=(X-b)(X-c)$, $g=(X-c)(X-a)$ și $h=(X-a)(X-b)$, unde a, b, c sunt constante reale distincte între ele. Arătați că, pentru x_1, x_2, $x_3 \in \mathbb{R}$, polinomul $x_1 f + x_2 g + x_3 h$ este egal cu polinomul nul dacă și numai dacă $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

SUBIECTUL II

Să se rezolve în mulțimea numerelor complexe ecuația

$$z^3-(2\sqrt{3}+3i)z^2+(1+4\sqrt{3}i)z-3i-6\sqrt{3}=0,$$

știind că admite soluții de forma bi, unde $b \in \mathbb{R}$.

SUBIECTUL III

Să se scrie ecuația cercului tangent axei Ox, având centrul pe prima bisectoare și care trece prin punctul $A(-2,1)$.

SUBIECTUL IV

Se consideră funcția $f:(-\infty,0]\backslash\{-1\} \to \mathbb{R}$, $f(x)=\ln|x+1|+\dfrac{x}{x+1}$.

1. Să se calculeze limitele funcției în capetele domeniului.

2. Să se stabilească monotonia funcției.

3. Să se demonstreze că ecuația $f(x)=0$ are soluție unică pe $(-\infty,-1)$.

SUBIECTUL V

Se consideră funcția $f:[0,2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-x^2$. Să se determine $m\in\mathbb{R}$, astfel încât dreapta de ecuație $y=mx$ să împartă subgraficul funcției în două mulțimi de arii egale.

BACALAUREAT 1998
SESIUNEA IUNIE
Varianta 1

Profilul economic

SUBIECTUL I

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (m-2)x^2 - 2mx + 2m - 3$, $m \in \mathbb{R}\backslash\{2\}$. Să se determine m, astfel încât inegalitatea $f(x) \leq 0$ să fie adevărată pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

2. Să se determine $x \in \mathbb{R}$, știind că al patrulea termen al dezvoltării $\left(x^{\frac{1}{2(1+\lg x)}} + x^{\frac{1}{12}}\right)^6$ este egal cu 200.

3. Se consideră polinomul $P(X) = \begin{vmatrix} 2X & -2X & 1 \\ 1-X^2 & X^2 & -1 \\ -2X-a+2 & X+a & X-2 \end{vmatrix}$. Să se determine parametrul real a pentru care polinomul admite rădăcină dublă întreagă.

SUBIECTUL II

Se consideră funcția $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{ax^2+bx+c}{x+d}$, unde D este domeniul maxim de definiție.

1. Să se determine a, b, c, $d \in \mathbb{R}$, astfel încât graficul funcției să admită asimptotele $x = 3$ și $y = x + 2$, iar punctul $A(1, 1)$ să se afle pe grafic.

2. Pentru $a = -1$, $b = -1$, $c = -2$, $d = -3$ să se reprezinte grafic funcția obținută. Să se discute numărul rădăcinilor ecuației $f(x) = m$.

SUBIECTUL III

Să se afle coordonatele punctelor de intersecție ale cercului de ecuație $x^2 + y^2 = 16$ cu parabola de ecuație $y^2 = 6x$. Să se afle aria fiecărei regiuni determinată de parabolă în interiorul cercului.

Varianta 2

Profilul economic

SUBIECTUL I

1. Să se determine valorile parametrului real a și să se rezolve ecuația $3x^3 - 12x^2 + ax - 6 = 0$, știind că rădăcinile x_1, x_2, x_3 satisfac relația $x_1 + x_2 = x_3$.

2. Se consideră sistemul $\begin{cases} ax + y + 2z = 0 \\ x + ay + z = 0 \\ 2x + 2y + az = 0 \end{cases}$, unde a este un parametru real.

- **a)** Pentru ce valori ale lui a sistemul are doar soluția banală?
- **b)** Să se rezolve sistemul pentru $a = 1$.

3. Se consideră polinomul $f \in \mathbb{Z}_3[X]$, $f = (a^2 + a + \hat{1})X^3 + (a + \hat{2})X + a$.

- **a)** Discutați, în raport cu $a \in \mathbb{Z}_3$, gradul polinomului f.
- **b)** Pentru $a = \hat{2}$, descompuneți f în factori ireductibili peste $\mathbb{Z}_3$.

SUBIECTUL II

1. Să se arate că funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} xe^x, & x \leq 0 \\ \dfrac{x^2}{x+1}, & x > 0 \end{cases}$ admite primitive și să se determine o astfel de primitivă.

2. Se consideră funcția $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - \sqrt{ax^2 + bx + 1}$, unde D este domeniul maxim de definiție, iar a, $b \in \mathbb{R}$, $a > 0$.

- **a)** Să se determine a, b, astfel încât $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -\dfrac{1}{2}$.
- **b)** Pentru $a = b = 1$ să se determine asimptotele la graficul funcției obținute.
- **c)** Să se calculeze $\displaystyle\int (x - f(x))\, dx$ pe intervalul $I = \mathbb{R}$.

SUBIECTUL III

Să se calculeze aria triunghiului ABC, știind că $A(0,1)$, $B(4,2)$, $C(2,3)$.

Varianta 3

Profilul economic

SUBIECTUL I

1. Se consideră dezvoltarea $\left(\sqrt{y}+\dfrac{1}{2\sqrt[4]{y}}\right)^n$, unde $y \in \mathbb{R}$, $y > 0$ și $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se determine n pentru care coeficienții primului, celui de al doilea și respectiv celui de al treilea termen al dezvoltării formează o progresie aritmetică.

b) Pentru $n = 8$ să se găsească termenii dezvoltării astfel încât puterea lui y să fie număr natural.

2. Se consideră mulțimea de matrice $G = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ 5b & a \end{pmatrix} \middle|\ a, b \in \mathbb{Z} \right\}$. Să se demonstreze că G este parte stabilă a lui $\mathscr{M}_2(\mathbb{Z})$ în raport cu adunarea, respectiv înmulțirea matricelor.

Să se arate că G, împreună cu operațiile induse, formează o structură de inel comutativ fără divizori ai lui zero.

SUBIECTUL II

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R}\backslash\{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + 2}{x - 1}$, unde a, $b \in \mathbb{R}$.

a) Să se determine a și b astfel încât graficul funcției să admită asimptota oblică dreapta $y = x + 2$.

b) Pentru $a = b = 1$ să se studieze variația și să se reprezinte grafic funcția obținută.

c) Pentru $a = b = 1$ să se calculeze aria mărginită de graficul funcției, asimptota oblică și dreptele $x = 2$, $x = 3$.

2. Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} x(\pi - 2\arctan x)$

SUBIECTUL III

Să se determine centrul și raza cercului de ecuație $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$. Să se scrie ecuația tangentei în punctele cercului care au ordonata nulă.

Varianta 4

Profilul economic

SUBIECTUL I

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Să se precizeze dacă există și sunt unici coeficienții a, b, c, d, astfel încât graficul să treacă prin punctele $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(-1,-6)$, iar la tangenta la grafic în punctul A să aibă panta egală cu -5.

În caz afirmativ, să se afle coeficienții a, b, c, d.

2. Se consideră mulțimea G a matricelor de forma $M(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ -a & 1 & -\dfrac{a^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$.

Să se demonstreze că G este parte stabilă a lui $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ în raport cu înmulțirea matricelor și că legea indusă determină pe G o structură de grup comutativ.

SUBIECTUL II

1. Să se determine $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $\displaystyle\int_0^x e^t(2e^t - 3)\, dt = 0$.

Să se determine $x > 0$ astfel încât $\displaystyle\int_{e^2}^x \frac{1}{t}(2\ln t - 3)\, dt = 0$.

2. Se consideră funcțiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4x$ și $g : \mathbb{R}\backslash\{1\} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{4x}{x-1}$.

a) Studiați variația și reprezentați graficul fiecărei funcții (în același reper cartezian).

b) Aflați coordonatele punctelor de intersecție ale celor două grafice și scrieți ecuațiile tangentelor la graficul funcției f, respectiv g, în punctele de intersecție.

SUBIECTUL III

Într-un reper cartezian se consideră punctele $A(2,3)$, $B(-5,1)$, $C(1,-3)$. Să se scrie ecuația perpendicularei d duse din C pe AB. Să se afle coordonatele punctului de intersecție a dreptei d cu AB.

Varianta 5

Profilul economic

SUBIECTUL I

1. Să se rezolve ecuația $\dfrac{2\lg x}{\lg(5x-4)} = 1$.

2. Se consideră mulțimea matricelor $M = \left\{ A = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \middle| \; x, y \in \mathbb{Z} \right\}$.

a) Să se demonstreze că M este parte stabilă a lui $\mathscr{M}_2(\mathbb{Z})$ în raport cu adunarea și cu înmulțirea matricelor.

b) Să se demonstreze că M împreună cu legile induse formează o structură de inel comutativ.

c) Are inelul M divizori ai lui zero?

3. Să se rezolve ecuația $\begin{vmatrix} 4-x & 1 & 4 \\ 1 & 2-x & 2 \\ 2 & 4 & 1-x \end{vmatrix} = 0$.

SUBIECTUL II

1. Se consideră funcția $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + ax + b}$, a, $b \in \mathbb{R}$.

a) Să se determine a și b pentru care graficul funcției admite ca asimptotă verticală dreapta $x = -2$ și funcția are un maxim în punctul $x = 2$.

b) Pentru $a = -4$ și $b = -12$ să se studieze variația și să se construiască graficul funcției obținute.

c) Pentru $a = -4$ și $b = -12$ să se calculeze aria suprafeței plane mărginită de graficul funcției, axa Ox și dreptele $x = 4$, $x = 5$.

2. Să se demonstreze că, pentru orice $x \geq 1$, are loc inegalitatea $\dfrac{2(x-1)}{x+1} \leq \ln x$.

SUBIECTUL III

Să se determine coordonatele ortocentrului triunghiului format de punctele $A(1,4)$, $B(3,-1)$, $C(8,-2)$.

Varianta 6

Profilul economic

SUBIECTUL I

1. Să se rezolve ecuația $\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{x-1}=1$.

2. Să se rezolve inecuația $\log_2(9-2^x)>3-x$.

3. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} 1 & a+1 & 0 \\ 0 & 1 & a+1 \\ a+1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\in\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

- **a)** Să se determine parametrul real a astfel încât matricea A să fie inversabilă.
- **b)** Pentru $a=1$ să se determine inversa matricei A.
- **c)** Să se rezolve ecuația matriceală

$$X\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

precizând în prealabil tipul matricei X.

SUBIECTUL II

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\backslash\{0\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^3-3x^2+m}{x^2}$, unde m este un parametru real.

- **a)** Să se determine m astfel încât funcția să aibă un extrem local în $x=2$.
- **b)** Pentru $m=4$, să se studieze variația și să se reprezinte grafic funcția obținută.
- **c)** Să se discute numărul rădăcinilor reale ale ecuației $x^3-\lambda x^2-3x+4=0$ după valorile parametrului real λ.

2. Să se calculeze primitivele funcției $f:(1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x(1+\ln x)}$.

Să se determine primitiva F cu prorpietatea $F(e^{e-1})=2$.

SUBIECTUL III

Să se scrie ecuația cercului care trece prin punctele $A(1,2)$, $B(2,0)$ și are centrul pe dreapta de ecuație $y=x-3$.

Varianta 7

Profilul economic

SUBIECTUL I

1. Să se determine valorile parametrului real m pentru care ecuația

$$mx^2 - 2(m-2)x - m - 10 = 0$$

are două rădăcini de semne contrare.

2. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Să se demonstreze că matricea A este inversabilă și să se calculeze inversa ei.

b) Să se rezolve ecuația matriceală $A \cdot X = B$, unde $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ și $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

3. Se consideră mulțimea $M = (-2, 2)$. Pentru x, $y \in M$ se definește legea $x \star y = \dfrac{x+y}{1+\dfrac{xy}{4}}$.

Să se demonstreze că "$\star$" este lege de compoziție internă pe M și că $(M, \star)$ este grup abelian.

SUBIECTUL II

Se consideră funcția $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2 + ax}{bx - 2}$, a, $b \in \mathbb{N}$.

1. Să se stabilească domeniul maxim de definiție D al funcției.

2. Să se determine a și b astfel încât funcția să aibă puncte de extrem în $x = -2$ și $x = 6$.

3. Fie $a = 6$ și $b = 1$.

a) Să se studieze variația și să se reprezinte grafic funcția obținută.

b) Să se scrie ecuația tangentei la grafic în punctul de abscisă -2.

c) Să se afle aria suprafeței plane limitate de graficul funcției, axa Ox și dreptele de ecuații $x = -6$, $x = 0$.

SUBIECTUL III

Să se scrie ecuația înălțimii din A în triunghiul ABC, determinat de dreptele:

$$\begin{aligned} AB &: \quad x - y + 2 = 0, \\ BC &: \quad 3x - y + 1 = 0, \\ AC &: \quad x + 2y + 2 = 0. \end{aligned}$$

Varianta 8

Profilul economic

SUBIECTUL I

1. Să se rezolve inecuația $\dfrac{\ln(2x^2-3x+1)}{x^2-3x} \le 0$.

2. Să se rezolve ecuația $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$, știind că a, b, c sunt rădăcinile sale.

3. Se consideră sistemul $\begin{cases} 2x - y + z - t = 1 \\ x + y + az + t = -1 \\ x - y + z + bt = c \end{cases}$.

Să se determine a, b, c astfel încât matricea sistemului să aibă rangul 2 și sistemul să fie compatibil. Pentru valorile aflate să se rezolve sistemul.

SUBIECTUL II

1. Se consideră funcția $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\ln x}{x} + \dfrac{1}{x} + ax + b$, unde $a, b \in \mathbb{R}$.

a) Să se determine a și b, astfel încât dreapta de ecuație $y = x$ să fie asimptotă a graficului funcției f.

b) Fie $a = 1$ și $b = 0$. Să se determine coordonatele punctului de intersecție a graficului cu asimptota oblică a funcției obținute.

Să se calculeze $I_n = \displaystyle\int_{e^{\frac{n}{2}}}^{e^{\frac{n+1}{2}}} (f(x) - x)\, dx$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Să se demonstreze că șirul $(I_n)_{n\ge1}$ este o progresie aritmetică.

2. Să se calculeze volumul corpului de rotație determinat de funcția $f : [0,3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{\dfrac{x(x-3)}{x-4}}$.

SUBIECTUL III

Să se determine coordonatele punctului de intersecție a mediatoarelor segmentelor $[AB]$ și $[AC]$, unde $A(2,5)$, $B(5,1)$, $C(-2,2)$.

BACALAUREAT 1998
SESIUNEA IUNIE, ORAL
Biletul nr. 1

Profilul fizică-chimie, chimie-biologie, industrial, agricol, silvic, educație fizică-real

1. Să se arate că $\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x = \dfrac{a^2+a+1}{a+1},\ a \in \mathbb{R}\right\} = (-\infty, -3] \cup [1, \infty)$.

2. Să se determine asimptotele funcției $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+4}}{3x-5}$ (D fiind domeniul maxim de definiție) și să se precizeze intervalele sale de monotonie.

Biletul nr. 2

Profilul fizică-chimie, chimie-biologie, industrial, agricol, silvic, educație fizică-real

1. Să se rezolve inecuația $|x-2| + |x-1| > 1$.

2. Să se afle a, b, $c \in \mathbb{R}$ astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} n(an - \sqrt{-2+bn+cn^2}) = 1$.

Biletul nr. 3

Profilul fizică-chimie, chimie-biologie, industrial, agricol, silvic, educație fizică-real

1. Să se determine funcția de gradul al doilea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, știind că admite un minim egal cu 9 și că graficul funcției trece prin punctele $A(-1; 13)$ și $B(2; 10)$.

2. Să se construiască graficul funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2+1}}$.

Biletul nr. 4

Profilul fizică-chimie, chimie-biologie, industrial, agricol, silvic, educație fizică-real

1. Pentru ce valori reale ale lui m inecuația

$$(m-1)x^2 - (m+1)x + m + 1 > 0$$

este verificată pentru orice $x \in \mathbb{R}$?

2. Calculați: $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x^2} - \cot^2 x\right)$.

Biletul nr. 5

Profilul fizică-chimie, chimie-biologie, industrial, agricol, silvic, educație fizică-real

1. Să se rezolve: $-1 < \dfrac{x^2+3x+2}{x^2-4x+3} \leq 2$.

2. Să se studieze convergența șirului:

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right),\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 2.$$

Biletul nr. 6

Profilul fizică-chimie, chimie-biologie, industrial, agricol, silvic, educație fizică-real

1. Să se rezolve sistemul $\begin{cases} x^2 + y^2 = 8 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 1 \end{cases}$.

2. Să se construiască graficul funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{|x|}{x^2 + 1}$.

Biletul nr. 7

Profilul fizică-chimie, chimie-biologie, industrial, agricol, silvic, educație fizică-real

1. Să se rezolve sistemul $\begin{cases} 5x^2 - 6xy + 5y^2 = 29 \\ 7x^2 - 8xy + 7y^2 = 43 \end{cases}$.

2. Să se construiască graficul funcției $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 2x}$, D fiind domeniul maxim de definiție.

Biletul nr. 8

Profilul fizică-chimie, chimie-biologie, industrial, agricol, silvic, educație fizică-real

1. Să se rezolve ecuația: $\sqrt[3]{x + 45} - \sqrt[3]{x - 16} = 1$.

2. Să se construiască graficul funcției $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + \dfrac{8}{x}$, D fiind domeniul maxim de definiție.

Biletul nr. 9

Profilul fizică-chimie, chimie-biologie, industrial, agricol, silvic, educație fizică-real

1. Să se rezolve ecuația: $\sqrt{4 - x} + \sqrt{5 + x} = 3$.

2. Să se demonstreze că dacă $a + b + c = 0$, atunci

$$\lim_{n \to 0} (a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2} + c\sqrt{n+3}) = 0$$

și

$$\lim_{n \to 0} (a \ln(3+n) + b \ln(2+n) + c \ln(1+n)) = 0.$$

Biletul nr. 10

Profilul fizică-chimie, chimie-biologie, industrial, agricol, silvic, educație fizică-real

1. Să se determine toate numerele complexe z cu proprietatea $z^2 = i$.

2. Calculați $\displaystyle\int xe^x \sin x \, dx$ pe intervalul $I = \mathbb{R}$.

Biletul nr. 11

Profilul fizică-chimie, chimie-biologie, industrial, agricol, silvic, educație fizică-real

1. Să se rezolve sistemul: $\begin{cases} x^2 - xy = 28 \\ y^2 - xy = 12 \end{cases}$.

2. Se consideră funcția definită prin expresia $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2+ax+a}$, a fiind un parametru real strict pozitiv. Să se determine a astfel încât graficul lui f să aibă o singură asimptotă verticală și să se reprezinte graficul funcției f pentru a astfel găsit.

Biletul nr. 12

Profilul fizică-chimie, chimie-biologie, industrial, agricol, silvic, educație fizică-real

1. Să se determine x, $y \in \mathbb{R}$ astfel încât $\dfrac{x-2}{1-i} - \dfrac{y-3}{1+i} = 1 - 3i$.

2. Se consideră $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x+k}{\sqrt{k}}$, unde $k \in \mathbb{R}$ este un parametru real. Să se determine parametrul k astfel încât $f(1) = -1$ și apoi să se reprezinte grafic funcția f.

Biletul nr. 13

Profilul fizică-chimie, chimie-biologie, industrial, agricol, silvic, educație fizică-real

1. Să se rezolve ecuația: $16\sqrt{(0,25)^{5-\frac{x}{4}}} = 2^{\sqrt{x+1}}$.

2. Calculați: $\displaystyle\int_0^4 x\sqrt{x^2+9}\,dx$.

Biletul nr. 14

Profilul fizică-chimie, chimie-biologie, industrial, agricol, silvic, educație fizică-real

1. Să se rezolve ecuația: $5^{\lg x} - 3^{\lg x - 1} = 3^{\lg x + 1} - 5^{\lg x - 1}$.

2. Să se determine asimptotele funcției $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = xe^{\frac{1}{x^2}}$.

Biletul nr. 15

Profilul fizică-chimie, chimie-biologie, industrial, agricol, silvic, educație fizică-real

1. Să se rezolve ecuația: $\log_x 2 - \log_x 3 = 2$.

2. Să se determine numărul rădăcinilor reale ale ecuației $1 + x = \arctan x$.

Biletul nr. 16

Profilul fizică-chimie, chimie-biologie, industrial, agricol, silvic, educație fizică-real

1. Să se rezolve ecuația: $2\lg^2 x^3 - 3\lg x - 1 = 0$.

2. Să se afle a, $b \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x) = \dfrac{ax^2+6x+2}{x^2+2x+b}$ să aibă o unică asimptotă verticală, iar graficul lui f să nu intersecteze asimptota orizontală.

Biletul nr. 17

Profilul fizică-chimie, chimie-biologie, industrial, agricol, silvic, educație fizică-real

1. Să se rezolve inecuația: $\lg^2 x - 2\lg x - 8 \leq 0$.

2. Să se reprezinte grafic funcția $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln\sqrt{1+x^2} - \arctan x$, unde D este domeniul maxim de definiție.

Biletul nr. 18

Profilul fizică-chimie, chimie-biologie, industrial, agricol, silvic, educație fizică-real

1. Să se rezolve inecuația: $\log_2(9-2^x) > 3-x$.

2. Să se afle numerele reale a și b dacă dreapta $y = 2x+3$ este asimptotă spre $+\infty$ pentru funcția $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{4x^2+ax+1}{bx+1}$, unde D este domeniul maxim de definiție. Pentru a, b aflați, să se construiască graficul funcției.

Biletul nr. 19

Profilul fizică-chimie, chimie-biologie, industrial, agricol, silvic, educație fizică-real

1. Să se discute și să se rezolve ecuația:

$$\log_a x - \log_{a^2} x + \log_{a^4} x \geq \frac{3}{4}.$$

2. Calculați: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} (\cot x)^{\tan 2x}$.

Biletul nr. 20

Profilul fizică-chimie, chimie-biologie, industrial, agricol, silvic, educație fizică-real

1. Să se rezolve ecuația: $\lg 2 + \lg(4^{x-2}+9) \leq 1 + \lg(2^{x-2}+1)$.

2. Să se studieze monotonia și mărginirea șirului $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$. În caz de convergență, să se calculeze limita.

Biletul nr. 21

Profilul fizică-chimie, chimie-biologie, industrial, agricol, silvic, educație fizică-real

1. Să se demonstreze că, pentru $n \in \mathbb{N}^*$, avem:

$$1\cdot 2\cdot 3 + 2\cdot 3\cdot 4 + \cdots + n\cdot(n+1)\cdot(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}.$$

2. Să se reprezinte grafic funcția $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = (2+x)\sqrt{1-x}$, unde D este domeniul maxim de definiție.

Biletul nr. 22

Profilul fizică-chimie, chimie-biologie, industrial, agricol, silvic, educație fizică-real

1. Să se demonstreze că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, avem:

$$\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 13} + \cdots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{n}{4n+1}.$$

2. Să se reprezinte grafic $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$, unde D este domeniul maxim de definiție.

Biletul nr. 23

Profilul fizică-chimie, chimie-biologie, industrial, agricol, silvic, educație fizică-real

1. Să se rezolve sistemul: $\begin{cases} A_x^y = 7A_x^{y-1} \\ 6C_x^y = 5C_x^{y+1} \end{cases}$.

2. Să se reprezinte grafic $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - \sqrt{|x^2 - 1|}$.

Biletul nr. 24

Profilul fizică-chimie, chimie-biologie, industrial, agricol, silvic, educație fizică-real

1. În dezvoltarea $\left(a\sqrt[4]{a} + \frac{1}{\sqrt{a}}\right)^n$, suma coeficienților binomiali de rang par este egală cu 128. Să se găsească termenul care conține pe a^3.

2. Calculați: $\displaystyle\int_0^1 x^2 \arctan x \, dx$.

Biletul nr. 25

Profilul fizică-chimie, chimie-biologie, industrial, agricol, silvic, educație fizică-real

1. Să se demonstreze egalitatea: $C_n^1 + 2C_n^2 + \cdots + nC_n^n = n \cdot 2^{n-1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

2. Determinați primitivele funcției $f : (1, 2) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{-x^2 + 3x - 2}$.

Biletul nr. 26

Profilul fizică-chimie, chimie-biologie, industrial, agricol, silvic, educație fizică-real

1. Să se găsească rangul celui mai mare termen din dezvoltarea $\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)^{100}$.

2. Să se calculeze: $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\cos 2x - \cos 4x}{x^2}$.

Biletul nr. 27

Profilul fizică-chimie, chimie-biologie, industrial, agricol, silvic, educație fizică-real

1. Să se determine polinomul $f = X^4 + aX^3 + bX^2 + cX + d$, astfel încât împărțit la $X^2 - 3X + 1$ să dea restul $2X + 1$ și împărțit la $X^2 - 1$ să dea restul $2X + 2$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (ax + \sqrt{1 + a^2x^2})^{\frac{1}{a}}$, unde $a \neq 0$ este o constantă reală. Să se arate că:

$$(1 + a^2x^2)f''(x) + a^2xf'(x) - f(x) = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Biletul nr. 28

Profilul fizică-chimie, chimie-biologie, industrial, agricol, silvic, educație fizică-real

1. Să se găsească primul termen și rația unei progresii geometrice dacă:

$$\begin{cases} a_4 + a_1 = \dfrac{7}{16} \\ \\ a_3 - a_2 + a_1 = \dfrac{7}{8} \end{cases}.$$

2. Să se arate că pentru orice $x \geq 0$ au loc inegalitățile:

$$\frac{x}{x+1} \leq \ln(1+x) \leq x.$$

Biletul nr. 29

Profilul fizică-chimie, chimie-biologie, industrial, agricol, silvic, educație fizică-real

1. Să se găsească suma primilor 20 de termeni ai unei progresii aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, dacă $a_6 + a_9 + a_{12} + a_{15} = 20$.

2. Să se determine asimptotele funcției $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = x\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$, unde D este domeniul maxim de definiție.

Biletul nr. 30

Profilul fizică-chimie, chimie-biologie, industrial, agricol, silvic, educație fizică-real

1. Să se determine a și b astfel încât polinomul $aX^4 + bX^3 - 3$ să fie divizibil cu $(X-1)^2$.

2. Să se studieze continuitatea funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 + xe^{nx}}{1 + e^{nx}}$.

Biletul nr. 31

Profilul fizică-chimie, chimie-biologie, industrial, agricol, silvic, educație fizică-real

1. Să se determine A și B astfel încât polinomul $AX^{n+2} + BX^n + 2$ să fie divizibil cu $(X-1)^2$.

2. Să se discute după parametrul real m numărul de soluții reale ale ecuației $2\ln x + x^2 - 4x + m = 0$.

Biletul nr. 32

Profilul fizică-chimie, chimie-biologie, industrial, agricol, silvic, educație fizică-real

1. Să se arate că polinomul $(X+1)^{6n+1} + X^{6n+2}$ se divide cu $X^2 + X + 1$.

2. Să se determine intervalele de monotonie ale funcției $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$ și, folosind rezultatul obținut, să se decidă care din numerele $a = 3^{\sqrt{5}}$ și $b = 5^{\sqrt{3}}$ este mai mare.

Biletul nr. 33

Profilul fizică-chimie, chimie-biologie, industrial, agricol, silvic, educație fizică-real

1. Fie ecuația $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ având rădăcinile x_1, x_2, x_3. Să se determine ecuația care are rădăcinile $y_1 = -x_1 + x_2 + x_3$, $y_2 = x_1 - x_2 + x_3$, $y_3 = x_1 + x_2 - x_3$.

2. Să se determine asimptotele funcției $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2}{|x-1|}$, unde D este domeniul maxim de definiție.

Biletul nr. 34

Profilul fizică-chimie, chimie-biologie, industrial, agricol, silvic, educație fizică-real

1. Să se rezolve ecuația $x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x - 6 = 0$, știind că suma a două rădăcini este egală cu suma celorlalte două.

2. Să se demonstreze că: $\ln(x+1) \geq \dfrac{2x}{x+2}$, dacă $x \geq 0$.

Biletul nr. 35

Profilul fizică-chimie, chimie-biologie, industrial, agricol, silvic, educație fizică-real

1. Să se determine matricele $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea $A^2 = I_2$, unde I_2 este matricea unitate.

2. Calculați: $\displaystyle\int e^{2x} \cos 3x \, dx$ pe intervalul $I = \mathbb{R}$.

Biletul nr. 36

Profilul fizică-chimie, chimie-biologie, industrial, agricol, silvic, educație fizică-real

1. Să se determine parametrul m astfel încât o rădăcină a ecuației $x^3 - 28x + m = 0$ să fie dublul altei rădăcini și apoi să se rezolve.

2. Să se determine constantele a, $b \in \mathbb{R}$ astfel încât funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + b, & \text{dacă } x \leq 2 \\ 2ax^3 + 11a, & \text{dacă } x > 2 \end{cases}$ să fie derivabilă pe $\mathbb{R}$.

Biletul nr. 37

Profilul fizică-chimie, chimie-biologie, industrial, agricol, silvic, educație fizică-real

1. Dacă x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului $X^3 - 2X^2 + 3X + 4$, să se calculeze $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ și $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$.

2. Să se demonstreze că $x \leq e^x - 1 \leq xe^x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Biletul nr. 38

Profilul fizică-chimie, chimie-biologie, industrial, agricol, silvic, educație fizică-real

1. Să se rezolve în mulțimea $\mathbb{C}$ ecuația: $2x^4 + 7x^3 + 9x^2 + 7x + 2 = 0$.

2. Să se determine constantele a, $b \in \mathbb{R}$ astfel încât funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} xe^x, & \text{dacă } x \leq 1 \\ ax + b, & \text{dacă } x > 1 \end{cases}$ să fie derivabilă pe $\mathbb{R}$.

Biletul nr. 39

Profilul fizică-chimie, chimie-biologie, industrial, agricol, silvic, educație fizică-real

1. Să se determine natura rădăcinilor ecuației $x^2(2x^2+5) - m(x^2+3) = 3$, unde m este un parametru real.

2. Calculați: $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{4-x^2}\, dx$.

Biletul nr. 40

Profilul fizică-chimie, chimie-biologie, industrial, agricol, silvic, educație fizică-real

1. Să se determine a, $b \in \mathbb{R}$ și apoi să se rezolve ecuația $x^4 - 7x^3 + 21x^2 + ax + b = 0$, știind că $1+2i$ este rădăcină a ecuației.

2. Să se determine parametrul real m astfel încât funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = mx - \ln(x^2+1)$ să fie monoton descrescătoare pe $\mathbb{R}$.

Biletul nr. 41

Profilul fizică-chimie, chimie-biologie, industrial, agricol, silvic, educație fizică-real

1. Să se determine m, $n \in \mathbb{R}$ și apoi să se rezolve ecuația $x^4 - x^3 + mx^2 + 2x + n = 0$, știind că ecuația admite rădăcina $1+i$.

2. Calculați: $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos^2 x\, dx$.

Biletul nr. 42

Profilul fizică-chimie, chimie-biologie, industrial, agricol, silvic, educație fizică-real

1. Să se determine matricele $X \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, astfel încât $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Interiorul cercului de ecuație $x^2+y^2=16$ este împărțit de parabola de ecuație $y^2=6x$ în două regiuni. Să se calculeze aria fiecăreia dintre ele.

Biletul nr. 43

Profilul fizică-chimie, chimie-biologie, industrial, agricol, silvic, educație fizică-real

1. Să se calculeze determinantul: $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

2. Să se calculeze volumul corpului de rotație determinat de funcția $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$.

Biletul nr. 44

Profilul fizică-chimie, chimie-biologie, industrial, agricol, silvic, educație fizică-real

1. Să se calculeze determinantul: $\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 & 5 \\ -1 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

2. Să se calculeze volumul corpului de rotație determinat de funcția $f : \left[0, \frac{1}{2}\right] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \arcsin x$.

Biletul nr. 45

Profilul fizică-chimie, chimie-biologie, industrial, agricol, silvic, educație fizică-real

1. Să se verifice egalitatea:

$$\begin{vmatrix} a^3 & 3a^2 & 3a & 1 \\ a^2 & a^2+2a & 2a+1 & 1 \\ a & 2a+1 & a+2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (a-1)^6.$$

2. Să se calculeze aria mulțimii plane cuprinse între parabolele de ecuații $y^2 = 3x$, respectiv $x^2 = 3y$.

Biletul nr. 46

Profilul fizică-chimie, chimie-biologie, industrial, agricol, silvic, educație fizică-real

1. Să se calculeze rangul matricei $A = \begin{pmatrix} 2 & a & -2 & 2 \\ 4 & -1 & 2a & 5 \\ 2 & 10 & -12 & 1 \end{pmatrix}$ pentru diferite valori alu lui $a \in \mathbb{C}$.

2. Calculați: $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^3 x \, dx$.

Biletul nr. 47

Profilul fizică-chimie, chimie-biologie, industrial, agricol, silvic, educație fizică-real

1. Să se precizeze dacă matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ este inversabilă și, în caz afirmativ, să se găsească inversa ei.

2. Calculați: $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin 2x \, dx$.

Biletul nr. 48

Profilul fizică-chimie, chimie-biologie, industrial, agricol, silvic, educație fizică-real

1. Să se precizeze tipul matricei X și apoi să se determine matricea X știind că:

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -5 \end{pmatrix}.$$

2. Să se determine primitivele funcției $f : (0,1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\arcsin x}{x^2}$.

Biletul nr. 49

Profilul fizică-chimie, chimie-biologie, industrial, agricol, silvic, educație fizică-real

1. Să se precizeze dacă matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ este inversabilă și, în caz afirmativ, să se calculeze inversa ei.

2. Să se calculeze $\displaystyle\int \frac{x^4+1}{x^3+1}\,dx$ pe intervalul $I \subset (-1, \infty)$.

Biletul nr. 50

Profilul fizică-chimie, chimie-biologie, industrial, agricol, silvic, educație fizică-real

1. Folosind regula lui Cramer, să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} 6x + 4y + z + 2t = 3 \\ 6x + 5y + 3z + 5t = 6 \\ 12x + 8y + z + 5t = 8 \\ 6x + 5y + 3z + 7t = 8 \end{cases}.$$

2. Determinați primitivele funcției $f : (-3, 3) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x\sqrt{9 - x^2}$.

Biletul nr. 51

Profilul fizică-chimie, chimie-biologie, industrial, agricol, silvic, educație fizică-real

1. Să se rezolve sistemul: $\begin{cases} 2x - y + z + 2t = 1 \\ x + y + 2z + t = 2 \\ 3x - 2y + z + 3t = 1 \end{cases}$.

2. Calculați $\displaystyle\int \frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x^3 - x^2 + x - 1}\,dx$ pe intervalul $I = (-\infty, 0)$.

Biletul nr. 52

Profilul fizică-chimie, chimie-biologie, industrial, agricol, silvic, educație fizică-real

1. Să se determine a, b, c astfel încât matricea sistemului să fie de rang 2, iar sistemul să fie compatibil. În acest caz să se rezolve sistemul $\begin{cases} 2x - y + z - t = 1 \\ x + y + az + t = -1 \\ x - y + z + bt = c \end{cases}$.

2. Determinați primitivele funcției $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x(x^2+1)}$.

Biletul nr. 53

Profilul fizică-chimie, chimie-biologie, industrial, agricol, silvic, educație fizică-real

1. Să se rezolve sistemul: $\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ x + y + az = 1 \end{cases}$ (discuție după parametrul $a \in \mathbb{R}$).

2. Calculați: $\displaystyle\int_0^1 e^{2x} \sin 3x\,dx$.

Biletul nr. 54

Profilul fizică-chimie, chimie-biologie, industrial, agricol, silvic, educație fizică-real

1. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât sistemul să aibă și soluții nenule, iar în acest caz să se rezolve:

$$\begin{cases} x - 2y + z - t = 0 \\ 2x - y + 3z - 3t = 0 \\ x + y + z + t = 0 \\ 2x + (a-1)y + 2z + at = 0 \end{cases}.$$

2. Calculați primitivele funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x\sqrt{x^2+1}$.

Biletul nr. 55

Profilul fizică-chimie, chimie-biologie, industrial, agricol, silvic, educație fizică-real

1. Se definește legea de compoziție $\star : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x \star y = x + y + xy$. Arătați că această lege este asociativă, comutativă și cu element neutru. Demonstrați că intervalul $[-1, \infty)$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea "$\star$".

2. Calculați: $\lim\limits_{x\to\infty} \left(x - x^2 \ln \dfrac{1+x}{x} \right)$.

Biletul nr. 56

Profilul fizică-chimie, chimie-biologie, industrial, agricol, silvic, educație fizică-real

1. Se definește legea de compoziție $\star : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x \star y = xy + 2ax + by$. Determinați a, $b \in \mathbb{R}$ astfel încât legea "$\star$" să fie comutativă și asociativă. Are legea astfel obținută element neutru?

2. Să se determine constantele a, $b \in \mathbb{R}$ astfel încât funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 1, & \text{dacă } x \le 0 \\ a \sin x + b \cos x, & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$ să fie derivabilă pe $\mathbb{R}$.

Biletul nr. 57

Profilul fizică-chimie, chimie-biologie, industrial, agricol, silvic, educație fizică-real

1. Demonstrați că $(x, y) \mapsto x \star y = \dfrac{x+y}{1+xy}$ este lege de compoziție internă pe $G = (-1, 1)$ și $(G, \star)$ este grup abelian.

2. Să se calculeze derivata de ordin n $(n > 1)$ a funcției $f : E \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x+a}$, precizând mulțimea E a punctelor unde f este de n ori derivabilă.

Biletul nr. 58

Profilul fizică-chimie, chimie-biologie, industrial, agricol, silvic, educație fizică-real

1. Notăm $M = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$. Demonstrați că M este parte stabilă a mulțimii $\mathbb{C}$ a numerelor complexe în raport cu înmulțirea numerelor complexe și că formează monoid comutativ în raport cu operația indusă. Determinați elementele simetrizabile ale monoidului M.

2. Să se calculeze $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} \dfrac{xe^{-\frac{1}{x}}}{\tan^2 x}$.

Biletul nr. 59

Profilul fizică-chimie, chimie-biologie, industrial, agricol, silvic, educație fizică-real

1. Fie $G = (0, \infty) \setminus \{1\}$ și legea definită prin $(x, y) \mapsto x \star y = x^{\ln y}$. Arătați că "$\star$" este lege de compoziție pe G și $(G, \star)$ este grup comutativ.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{|x^2 - 1|}$. Să se calculeze derivatele laterale în 0, 1 și -1.

Biletul nr. 60

Profilul fizică-chimie, chimie-biologie, industrial, agricol, silvic, educație fizică-real

1. Pe $\mathbb{Z}$ se definește legea de compoziție $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $(x, y) \mapsto x \triangle y = x + y - 1$. Demonstrați că $(\mathbb{Z}, \triangle)$ este grup comutativ.

2. Să se determine punctele critice pentru $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \arctan \dfrac{3x+1}{\sqrt{x^2 - 1}}$ (se vor afla domeniul maxim de definiție D și domeniul de derivabilitate).

Biletul nr. 61

Profilul fizică-chimie, chimie-biologie, industrial, agricol, silvic, educație fizică-real

1. Fie $\varepsilon = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ și $G = \{1, \varepsilon, \varepsilon^2\} \subset \mathbb{C}$. Demonstrați că G este parte stabilă a lui $\mathbb{C}$ în raport cu înmulțirea numerelor complexe și alcătuiți tabla operației induse. Deduceți că $(G, \cdot)$ este grup comutativ.

2. Să se studieze continuitatea funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt[3]{1-x} - 2x - 1}{x}, & \text{dacă } x \neq 0 \\ 1, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$.

Biletul nr. 62

Profilul fizică-chimie, chimie-biologie, industrial, agricol, silvic, educație fizică-real

1. Pe mulțimea $\mathbb{Z}$ a numerelor întregi definim legile de compoziție $x \perp y = x + y + 3$ și $x \top y = xy + 3x + 3y + 6$, $\forall$ x, $y \in \mathbb{Z}$. Demonstrați că $(\mathbb{Z}, \perp, \top)$ este un inel comutativ.

2. Să se calculeze derivata funcției $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}}$ în punctul $x_0 = 0$ (se va preciza domeniul maxim de definiție D și domeniul de derivabilitate ale funcției f).

Biletul nr. 63

Profilul fizică-chimie, chimie-biologie, industrial, agricol, silvic, educație fizică-real

1. Fie $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 5b & a \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{Z} \right\}$. Arătați că A este parte stabilă a lui $\mathscr{M}_2(\mathbb{Z})$ în raport cu adunarea și înmulțirea matricelor și că formează un inel comutativ în raport cu operațiile induse.

2. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 2, & \text{dacă } x > 0 \\ 0, & \text{dacă } x \leq 0 \end{cases}$. Să se studieze derivabilitatea lui f și să se determine punctele unde tangenta la graficul funcției trece prin origine.

Biletul nr. 64

Profilul fizică-chimie, chimie-biologie, industrial, agricol, silvic, educație fizică-real

1. Rezolvați în $\mathbb{Z}_{12}$ sistemul: $\begin{cases} \hat{3}x + \hat{2}y = \hat{4} \\ \hat{2}x + \hat{3}y = \hat{1} \end{cases}$.

2. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât funcția

$$f : \mathbb{R}\backslash\{1\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} a\ln(3-x), & \text{dacă } x < 1 \\ \dfrac{2^x - 2}{x - 1}, & \text{dacă } x > 1 \end{cases}$$

să aibă limită în punctul $x_0 = 1$.

Biletul nr. 65

Profilul fizică-chimie, chimie-biologie, industrial, agricol, silvic, educație fizică-real

1. Fie $f,\, g \in \mathbb{Z}_5[X]$, $f = \hat{3}X^5 + \hat{2}X^3 + \hat{2}X + \hat{4}$, $g = \hat{2}X^3 + \hat{3}X^2 + \hat{1}$. Aflați câtul și restul împărțirii lui f la g.

2. Să se studieze continuitatea și să se traseze graficul funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{e^{nx}}{1 + e^{nx}}$.

Biletul nr. 66

Profilul fizică-chimie, chimie-biologie, industrial, agricol, silvic, educație fizică-real

1. Fie $K = \left\{ \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix} \middle|\ a, b \in \mathbb{Q} \right\}$. Arătați că K este parte stabilă a lui $\mathscr{M}_2(\mathbb{Q})$ în raport cu adunarea și înmulțirea matricelor și că formează un corp în raport cu operațiile induse.

2. Calculați: $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt[3]{x} - 1}$.

Biletul nr. 67

Profilul fizică-chimie, chimie-biologie, industrial, agricol, silvic, educație fizică-real

1. Definim pe $\mathbb{R}$ legea de compoziție $(x, y) \mapsto x \star y = x + y + xy$ și fie $G = [-1, \infty)$ și $H = (-1, \infty)$. Arătați că G și H sunt părți stabile ale lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea "$\star$" și că formează monoizi comutativi în raport cu operația indusă. Care din cei doi monoizi este grup?

2. Calculați: $\lim\limits_{x\to\infty} (x - \sqrt{x^2 - 2x})$.

Biletul nr. 68

Profilul fizică-chimie, chimie-biologie, industrial, agricol, silvic, educație fizică-real

1. Rezolvați în $\mathbb{Z}_{12}$ sistemul: $\begin{cases} \hat{3}x + \hat{4}y = \hat{11} \\ \hat{4}x + \hat{9}y = \hat{10} \end{cases}$.

2. Să se arate că șirul $a_n = \dfrac{2^n}{(n!)^2}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, este monoton, mărginit și convergent. Aflați limita sa.

Biletul nr. 69

Profilul fizică-chimie, chimie-biologie, industrial, agricol, silvic, educație fizică-real

1. Definim pe $\mathbb{R}$ legea de compoziție $(x, y) \mapsto x \star y = xy - x - y + 2$. Studiați proprietățile acestei legi.

2. Să se determine constantele reale a și b astfel încât funcția

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x^2 + a, & \text{dacă } x \leq 2 \\ ax + b, & \text{dacă } x > 2 \end{cases}$$

să fie continuă pe $\mathbb{R}$ și, în plus, să existe $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2}$.

BACALAUREAT 1998
SESIUNEA AUGUST
Varianta 1

Profilul matematică - fizică, informatică, metrologie

SUBIECTUL I

1. Să se rezolve inecuaţia $\sqrt{2-x} < x$.

2. Să se rezolve sistemul $\begin{cases} 4^x - \;\; 5 \cdot 9^y = -1 \\ 4^x + 2^x \cdot 3^y = \;\; 6 \end{cases}$.

3. Pentru $x,\, y \in \mathbb{Q}$ se defineşte legea de compoziţie

$$x \star y = x + y - 5xy.$$

Să se cerceteze dacă există $a \in \mathbb{Q}$ astfel încât $(\mathbb{Q}\backslash\{a\}, \star)$ să fie grup comutativ.

SUBIECTUL II

1. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 + ax + 1)e^x$, unde $a \in \mathbb{R}$.

a) Să se determine parametrul a pentru care funcţia este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

b) Pentru $a = 0$ determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei în punctul de intersecţie cu axa Oy.

c) Să se demonstreze că $g : \mathbb{R} \to (0, \infty)$, $g(x) = (x^2 + 1)e^x$ este bijectivă, cu inversa derivabilă în punctul $x_0 = 1$ şi să se calculeze derivata inversei în punctul $x_0 = 1$.

2. Să se calculeze integrala $\displaystyle\int_0^1 x^2 \arctan x \, dx$.

SUBIECTUL III

Se dă hiperbola $\mathscr{H}$ de ecuaţie $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} - 1 = 0$.

a) Să se afle ecuaţia tangentei la hiperbolă în punctul $T(2\sqrt{2}, 3)$.

b) Să se calculeze aria triunghiului format de asimptotele hiperbolei $\mathscr{H}$ şi dreapta de ecuaţie $9x + 2y - 24 = 0$.

Varianta 2

Profilul matematică - fizică, informatică, metrologie

SUBIECTUL I

1. Să se rezolve ecuația $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=2$.

2. Să se discute, în funcție de parametrul real a, și să se rezolve, următorul sistem:

$$\begin{cases} x-\ \ y+az= & 1 \\ 2x-ay+2z= & -1 \\ x+ay+az= & a-6 \end{cases}.$$

3. Să se rezolve următorul sistem:

$$\begin{cases} A_x^y=7A_x^{y-1} \\ 6C_x^y=5C_x^{y+1} \end{cases}.$$

SUBIECTUL II

1. Să se calculeze următoarea limită:

$$\lim_{n\to\infty} n^2\left(\sqrt{n^2+\sqrt{n^4+1}}-n\sqrt{2}\right).$$

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{ax+b}{x^2+1}$, unde a, $b\in\mathbb{R}$.

a) Să se determine a, b, știind că funcția admite în $x=1$ un extrem egal cu $\dfrac{1}{2}$.

b) Pentru $a=1$ și $b=0$ să se studieze variația și să se reprezinte grafic funcția, folosind și derivata a doua.

c) Pentru $a=1$ și $b=0$ se notează cu $A(u)$ aria mulțimii cuprinse între axa Ox, axa Oy, graficul funcției și dreapta $x=u$ $(u>0)$. Să se determine $u>\dfrac{1}{2}$ pentru care $A(u)<\ln(2u-1)$.

SUBIECTUL III

Se dă cercul de ecuație $x^2+y^2-4x+2y=0$. Să se scrie ecuația dreptei care trece prin centrul cercului dat și este perependiculară pe dreapta de ecuație $2x+3y-4=0$.

Varianta 3

Profilul matematică - fizică, informatică, metrologie

SUBIECTUL I

1. Fie x_1, x_2, x_3 rădăcinile polinomului $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^3 + (m+1)X^2 + 2X + m$. Să se calculeze în funcție de m:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \text{ și } x_1^3 + x_2^3 + x_3^3,$$

apoi să se rezolve inecuația $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 \geq 5 - 2x_1x_2x_3$.

2. Definim pe $\mathbb{Z}$ legile de compoziție $x \oplus y = x + y + 3$ și $x \otimes y = xy + 3x + 3y + 6$. Să se demonstreze că $(\mathbb{Z}, \oplus, \otimes)$ este un inel comutativ. Verificați dacă inelul are divizori ai lui zero. Determinați elementele inversabile ale acestui inel.

3. Să se găsească suma primilor douăzeci de termeni ai unei progresii aritmetice, dacă

$$a_6 + a_9 + a_{12} + a_{15} = 20.$$

SUBIECTUL II

1. Se dă funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} xe^x, & \text{dacă } x \leq 1 \\ ax + b, & \text{dacă } x > 1 \end{cases}$.

a) Să se determine constantele reale a și b astfel încât funcția să fie continuă și derivabilă pe $\mathbb{R}$.

b) Pentru $a = 2e$ și $b = -e$ să se determine o primitivă a lui f pe $\mathbb{R}$.

2. Să se demonstreze că, pentru orice $x \geq 0$, au loc inegalitățile:

$$\frac{x}{x+1} \leq \ln(1+x) \leq x.$$

SUBIECTUL III

Să se determine aria triunghiului ABC determinat de dreptele de ecuații:

$$\begin{aligned} AB: &\quad x - 2y + 4 = 0, \\ BC: &\quad 2x + y + 1 = 0, \\ AC: &\quad x + y + 2 = 0. \end{aligned}$$

Varianta 4

Profilul matematică - fizică, informatică, metrologie

SUBIECTUL I

1. Să se determine n astfel încât în dezvoltarea $\left(\sqrt{2^x}+\sqrt{2^{1-x}}\right)^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ suma coeficienților binomiali ai ultimilor trei termeni să fie egală cu 22. Pentru $n = 6$ să se determine x știind că suma termenilor T_3 și T_5 este egală cu 135.

2. Se consideră matricea X cu proprietatea

$$X \cdot \begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Precizați tipul matricei X și apoi determinați această matrice.

3. Rezolvați în $\mathbb{Z}_8$:

$$\begin{cases} x + \hat{2}y = \hat{1} \\ \hat{3}x + \hat{4}y = \hat{1} \end{cases}.$$

SUBIECTUL II

1. Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{2x^2+4x+1} - ax - b\right) = 2\sqrt{2}.$$

2. Pentru $n \in \mathbb{N}$ se consideră integralele $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^n \cos 2x \, dx$ și $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^n \, dx$.

a) Să se calculeze I_0 și I_1.

b) Fără a calcula integrala I_n, să se precizeze monotonia șirului $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

c) Comparați integrala I_n cu integrala J_n. Să se precizeze dacă șirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent și, în caz afirmativ, să se determine limita sa.

SUBIECTUL III

Să se scrie ecuația cercului circumscris triunghiului ABC, unde vârfurile triunghiului au coordonatele $A(2,5)$, $B(5,1)$ și $C(-2,2)$.

Varianta 5

Profilul matematică - fizică, informatică, metrologie

SUBIECTUL I

1. Se dă expresia $E(x) = \dfrac{x^2 + (m+1)x + m + 2}{x^2 + x + m}$.

Să se determine parametrul real m astfel încât $E(x)$ să aibă sens și să fie strict pozitivă pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

2. Să se rezolve ecuația $2\lg^2(x^3) - 3\lg x - 1 = 0$.

3. Fie $G = (-3, 3)$. Pentru $x, y \in G$ definim:

$$x \star y = \frac{9(x+y)}{9+xy}.$$

Să se demonstreze că "$\star$" este lege de compoziție pe G și că $(G, \star)$ este grup comutativ.

SUBIECTUL II

1. Se consideră funcția $f : [-2, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x-1|e^{-|x+1|}$.

a) Să se expliciteze funcția f și să se studieze derivabilitatea ei.

b) Să se determine extremele locale ale funcției.

2. Să se calculeze volumul corpului de rotație determinat de funcția $f : \left[0, \dfrac{1}{2}\right] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \arcsin x$.

SUBIECTUL III

Paralelogramul $ABCD$ are vârfurile consecutive A și B de coordonate $A(-3, -1)$ și $B\left(2, \dfrac{11}{4}\right)$. Se știe că punctul $Q\left(3, \dfrac{1}{2}\right)$ este intersecția diagonalelor paralelogramului. Să se afle coordonatele vârfurilor C și D și ecuația dreptei BC.

BACALAUREAT 1998
SESIUNEA AUGUST
Varianta 1

Profilul economic

SUBIECTUL I

1. Să se rezolve sistemul $\begin{cases} A_x^y = 7A_x^{y-1} \\ 6C_x^y = 5C_x^{y+1} \end{cases}$.

2. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 3 & 1 & p \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & p \\ 3 & -1 & 1 & q \end{pmatrix}$. Să se afle numerele reale p și q astfel încât cele două matrice să aibă același rang.

3. Pentru x, $y \in \mathbb{R}$ definim legea de compoziție $x \star y = xy - x - y + 2$. Demonstrați că $G = (1, \infty)$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu operația "$\star$" și că G împreună cu operația indusă are o structură de grup comutativ. Demonstrați că funcția $f : \mathbb{R} \to G$, $f(x) = 2^x + 1$ este un izomorfism între grupurile $(\mathbb{R}, +)$ și $(G, \star)$.

SUBIECTUL II

Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x - 1)e^{-x}$.

a) Să se studieze variația și să se reprezinte grafic funcția f, folosind și derivata a doua.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{u \to \infty} A(u)$, unde $A(u)$ reprezintă aria mulțimii plane mărginite de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x = 1$ și $x = u$ $(u > 1)$.

SUBIECTUL III

Să se scrie ecuația simetricei dreptei de ecuație $3x + y - 1 = 0$ față de punctul $A(4, -2)$.

Varianta 2

Profilul economic

SUBIECTUL I

1. Să se rezolve ecuația $16\sqrt{(0,25)^{5-\frac{x}{4}}} = 2^{\sqrt{x+1}}$.

2. Descompuneți în factori ireductibili peste $\mathbb{Z}_5$ polinomul $f = X^4 + X^3 + \hat{2}X^2 + X + \hat{1}$.

3. Pentru fiecare $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$ se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 2-x & 1-x \\ 2(x-1) & 2x-1 \end{pmatrix}$ și mulțimea $E = \{A(x) \mid x \in \mathbb{R}^*\}$.

- **a)** Demonstrați că pentru orice x, $y \in \mathbb{R}^*$ avem relația $A(x) \cdot A(y) = A(xy)$.
- **b)** Calculați $(A(x))^n$ pentru $A(x) \in E$.
- **c)** Demonstrați că înmulțirea matricelor este lege de compoziție pe E și că E, împreună cu legea indusă, are o structură de grup abelian.

SUBIECTUL II

Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \backslash \{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2 + mx + n}{x-1}$, unde m, $n \in \mathbb{R}$.

a) Să se determine m și n astfel încât funcția f să admită un extrem egal cu 1 în punctul $x = 0$.

b) Pentru $m = 1$ și $n = -1$, să se studieze variația și să se reprezinte grafic funcția f, folosind și derivata a doua.

c) Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției de la punctul b) în punctul de abscisă 3.

d) Să se calculeze aria suprafeței plane limitate de graficul funcției de la punctul b), axa Ox și dreptele de ecuații $x = 2$, $x = 5$.

SUBIECTUL III

Să se găsească ecuația cercului de diametru $[AB]$, știind că $A(3,2)$ și $B(-1,6)$. Să se scrie ecuația tangentei la cerc în punctul A.

Varianta 3

Profilul economic

SUBIECTUL I

1. Să se determine suma primilor 20 de termeni ai unei progresii aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$ dacă

$$a_6 + a_9 + a_{12} + a_{15} = 20.$$

2. Se consideră sistemul $\begin{cases} 4x + my \quad\;\; = 0 \\ \qquad\;\;\; y - z = 0 \\ 2x + \;\; y + z = 0 \end{cases}$. Pentru ce valori ale parametrului real m sistemul are și soluții diferite de soluția nulă? Să se rezolve sistemul în acest caz.

3. Fie K un corp comutativ și polinomul $f \in K[X]$.

a) Dacă $a, b \in K$ și $a \neq b$, demonstrați că restul împărțirii polinomului f la $(X-a)(X-b)$ este $\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}X + \dfrac{af(b)-bf(a)}{a-b}$.

b) Demonstrați că dacă $a \neq b$, $X - a \mid f$ și $X - b \mid f$, atunci $(X-a)(X-b) \mid f$.

SUBIECTUL II

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R}\backslash\{-1; 3\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2 + ax}{(x+3)^2}$.

a) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care tangenta la graficul funcției în punctul de abscisă 1 este paralelă cu axa Ox.

b) Pentru $a = -3$ să se studieze variația și să se reprezinte grafic funcția, folosind și derivata a doua.

2. Să se calculeze volumul corpului de rotație generat de funcția $f : [1, e] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.

SUBIECTUL III

Se dă dreapta d de ecuație $2x - y + 4 = 0$. Să se cerceteze dacă punctele $A(-5, 3)$ și $B\left(\dfrac{11}{5}, -\dfrac{3}{5}\right)$ sunt simetrice față de dreapta d.

Varianta 4

Profilul economic

SUBIECTUL I

1. Să se rezolve ecuația $4^{x-\sqrt{x^2-5}} - 12 \cdot 2^{x-1-\sqrt{x^2-5}} + 8 = 0$.

2. Să se determine valorile parametrului real m pentru care ecuația

$$4mx^2 + 4(1-2m)x + 3(m-1) = 0$$

are rădăcini reale strict pozitive.

3. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Să se demonstreze că există $x, y \in \mathbb{R}$ astfel încât $A^2 = xA + yI_3$, unde I_3 este matricea unitate.

b) Este matricea A inversabilă? În caz afirmativ, să se calculeze A^{-1}.

SUBIECTUL II

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{e^x}, & x \in (-\infty, 1] \\ \dfrac{\ln^2 x}{x}, & x \in (1, \infty) \end{cases}$.

Să se demonstreze că funcția f are primitive pe $\mathbb{R}$ și să se afle o primitivă a sa.

2. Știind că $a + b + 1 = 0$, să se calculeze limita

$$\lim_{n\to\infty} (a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2} + \sqrt{n+3}).$$

SUBIECTUL III

Știind că $A(1, 2)$ este piciorul perpendicularei duse din origine pe dreapta d, să se scrie ecuația dreptei d.

Varianta 5

Profilul economic

SUBIECTUL I

1. Să se rezolve inecuația $\left|\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-4}\right| \le 1$.

2. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ și să se rezolve ecuația

$$x^3 + mx^2 - x - 3 = 0,$$

știind că rădăcinile sale sunt în progresie aritmetică.

3. Să se rezolve și să se discute după parametrul real m următorul sistem de ecuații:

$$\begin{cases} x - my + z = 2m \\ x - 2y + z = -1 \\ mx + m^2y - 2z = 2 \end{cases}.$$

SUBIECTUL II

Fie funcția $f : \mathbb{R}\backslash\{c\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2+ax+b}{x+c}$.

a) Să se determine a, b, c, astfel încât graficul funcției să aibă ca asimptote dreptele de ecuații $x = 1$ și $y = x + 2$, iar $P(2, 6)$ să fie un punct al graficului.

b) Pentru $a = 1$, $b = 0$ și $c = -1$ să se studieze variația și să se reprezinte grafic funcția f, folosind derivata a doua.

c) Să se scrie ecuația tangentei la graficul de la punctul b), în punctul de abscisă -1.

d) Să se calculeze aria mulțimii plane mărginite de graficul funcției, axa Oy, asimptota oblică și dreapta de ecuație $x = -1$.

SUBIECTUL III

Să se precizeze dacă cercul de centru $C(4, 0)$, tangent la dreapta de ecuație $d:\ 4x+3y-6 = 0$, taie sau nu dreapta de ecuație $4x - 3y - 6 = 0$.

BACALAUREAT 1998
SESIUNEA AUGUST
Varianta 1

Profilul umanist

SUBIECTUL I

1. Să se determine $X \in \mathscr{M}_2(\mathbb{Z})$ care satisface relația:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Pe $\mathbb{R}$ definim legea de compoziție

$$x \star y = \frac{1}{2}(x + y - xy + 1).$$

Să se cerceteze dacă această lege este asociativă, comutativă și are element neutru. Dacă există element neutru, determinați elementele simetrizabile față de legea ”$\star$”.

SUBIECTUL II

1. Determinați primitivele funcțiilor:

a) $f : (0, \infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = -3x^4 + \dfrac{2}{x} - \sqrt{x} + 3\sin x + \dfrac{1}{x^2+1}$;

b) $f : (0, \infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 + \ln x$.

2. Să se calculeze următoarele integrale:

a) $\displaystyle\int_0^1 xe^{-x}\, dx$;

b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\, dx$.

3. Se consideră funcțiile $f,\ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 + 4x$ și $g(x) = x + 4$.

a) Să se rezolve inecuația $f(x) \leq g(x)$.

b) Să se calculeze aria mulțimii plane cuprinse între graficele funcțiilor f și g și dreptele de ecuații $x = -4$, $x = 1$.

Varianta 2

Profilul umanist

SUBIECTUL I

1. Fie $H = \left\{ A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\; a, b \in \mathbb{R},\, a \neq 0 \right\}$. Demonstrați că:

- **a)** Dacă $A,\, B \in H$, atunci $A \cdot B \in H$.
- **b)** Oricare ar fi $A \in H$, există $X \in H$ astfel încât $A \cdot X = I_2$, unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Pentru numerele reale x și y definim operația $x \star y = xy - 5x - 5y + 30$.

- **a)** Demonstrați că ”$\star$” este lege de compoziție pe mulțimea $G = (5, +\infty)$.
- **b)** Verificați dacă $(G, \star)$ este grup abelian.
- **c)** Rezolvați în G ecuația $x \star x = 9$.

SUBIECTUL II

1. Determinați primitivele funcțiilor:

- **a)** $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R},\, f(x) = (x^2 - 4)(x + 1) + \dfrac{1}{x} - \sqrt[3]{x}$.
- **b)** $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R},\, f(x) = x^2 \cos x$.

2. Fie $f : [0, \infty) \to \mathbb{R},\, f(x) = \dfrac{x^3}{x + 1}$.

- **a)** Să se arate că există $a,\, b,\, c \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x) = ax^2 + bx + c - \dfrac{1}{x + 1}$, pentru orice $x \in [0, \infty)$.
- **b)** Să se calculeze integrala $\displaystyle\int_1^3 f(x)\, dx$.

3. Fie funcția $f : (0, \infty) \to \mathbb{R},\, f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$. Să se calculeze aria limitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x = 1$ și $x = e$.

Varianta 3

Profilul umanist

SUBIECTUL I

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Să se determine matricea $X \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ care verifică egalitatea $A \cdot X = B$.

2. Fie M mulțimea matricelor de forma $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 5b & a \end{pmatrix}$ cu $a,\ b \in \mathbb{Z}$. Demonstrați că adunarea și înmulțirea matricelor sunt legi de compoziție pe M și verificați dacă $(M, +, \cdot)$ este inel comutativ.

SUBIECTUL II

1. Determinați primitivele funcțiilor:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = (2x+1)^2(x-1) + \dfrac{1}{x^2+9}\cdot$

b) $f : (0, \infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = x \ln^2 x$.

2. **a)** Să se calculeze integrala $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin 2x \ dx$.

b) Să se determine $a > 0$ astfel încât $\displaystyle\int_0^a (2 - 4x + 3x^2)\ dx = a$.

3. Se consideră funcțiile $f,\ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3 - 2x - 3$ și $g(x) = 2x^2 - x - 3$.

a) Să se rezolve inecuația $f(x) \geq g(x)$.

b) Calculați aria mulțimii plane cuprinse între graficele celor două funcții și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = 1$.

Varianta 4

Profilul umanist

SUBIECTUL I

1. Pentru orice $a \in \mathbb{R}$ definim matricea $U_a \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, $U_a = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și notăm cu G mulțimea tuturor acestor matrice.

- **a)** Arătați că pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$ sunt satisfăcute relațiile $U_a \cdot U_b = U_{a+b}$ și $U_a \cdot U_{-a} = I_2$, unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Deduceți că înmulțirea matricelor este lege de compoziție pe G.
- **b)** Precizați dacă matricea I_2 face parte din G și verificați dacă elementele din G sunt simetrizabile față de înmulțirea matricelor.

2. Pentru $x, y \in \mathbb{R}$ definim următoarea lege de compoziție:

$$x \star y = xy - 3x - 3y + 12.$$

- **a)** Verificați dacă legea ?$\star$? este asociativă și comutativă.
- **b)** Fie $G = (3, \infty)$. Demonstrați că, dacă $x \in G$ și $y \in G$, atunci $x \star y \in G$.
- **c)** Cercetați dacă există $e \in G$ astfel încât pentru orice $x \in G$ să avem $x \star e = e \star x = x$.
- **d)** Verificați dacă $(G, \star)$ este grup abelian.

SUBIECTUL II

1. **a)** Să se determine primitivele funcției $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{4\sqrt{x}} - \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{2}{x^2+1}$.

- **b)** Să se determine o funcție a cărei primitivă este $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$.

2. Să se calculeze integralele:

- **a)** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos 2x \, dx$.
- **b)** $\displaystyle\int_1^e \ln^2 x \, dx$.

3. Se consideră funcțiile $f, g : \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x - 2$, $g(x) = 2 - 4x - x^2$.

- **a)** Să se determine $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x) \leq g(x)$.
- **b)** Să se calculeze aria mulțimii plane cuprinse între graficele funcțiilor f și g și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = 3$.

Varianta 5

Profilul umanist

SUBIECTUL I

1. Se dau matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Să se determine matricea $X \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ care verifică egalitatea $A \cdot X = B$.

2. Pe mulțimea $\mathbb{Q}$ se definesc legile de compoziție

$$x \oplus y = x + y + 2 \text{ și } x \otimes y = 2xy + 4x + 4y + 6.$$

a) Demonstrați că $(\mathbb{Q}, \oplus)$ este grup abelian.

b) Demonstrați că $(\mathbb{Q}, \otimes)$ este monoid comutativ.

c) Este legea de compoziție "$\otimes$" distributivă față de legea "$\oplus$"? Ce concluzie se poate trage?

SUBIECTUL II

1. Determinați primitivele funcțiilor:

a) $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2 - 5x + \dfrac{1}{x} - x\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{2x} \sin x$.

2. **a)** Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x}{(x^2 + x + 1)^2}$. Demonstrați că funcția f admite o primitivă $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de forma $F(x) = \dfrac{ax + b}{x^2 + x + 1}$. Constantele a și b se vor determina.

b) Să se calculeze integrala $\displaystyle\int_0^\pi x^2 \cos x \, dx$.

3. Determinați aria subgraficului funcției $f : [1, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 - x)e^x$.

BACALAUREAT 1998
SESIUNEA AUGUST
Varianta 1

Profilul pedagogic

SUBIECTUL I

1. Să se determine cifrele a și b astfel încât numărul $N = \overline{a23b}$ să fie divizibil cu 18.

2. La o serbare școlară s-au vândut bilete a câte 4000 lei și a câte 5000 lei bucata. În total s-au vândut 700 de bilete pe care s-au încasat 3000000 lei. Câte bilete de fiecare fel s-au vândut?

3. Suma a trei numere este 60. Dacă înmulțim al doilea număr cu $\frac{5}{4}$ obținem același rezultat ca și atunci când adăugăm 5. Știind că al treilea număr este cu 6 mai mare decât primul, să se afle numerele.

SUBIECTUL II

1. Se consideră familia de funcții de gradul al doilea $f_m(x) = x^2 - 2(m-1)x + m$, unde m este un parametru real.

a) Să se determine curba pe care o descriu vârfurile parabolelor asociate funcțiilor din familie, când m variază.

b) Să se arate că toate parabolele familiei trec printr-un punct fix.

2. Să se rezolve în mulțimea claselor de resturi modulo 12 următorul sistem de ecuații:

$$\begin{cases} \hat{5}x + \hat{4}y = \hat{4} \\ \hat{2}x + \hat{3}y = \widehat{11} \end{cases} .$$

SUBIECTUL III

1. Într-un paralelogram $ABCD$ se dau: $BC = 45$ cm, $AC = 17$ cm și înălțimea $CE = 8$ cm ($E \in AD$). Se prelungește CE până intersectează prelungirea laturii AB în punctul N. Se cere să se calculeze aria triunghiului AEN.

2. Laturile bazelor unui trunchi de piramidă triunghiulară regulată sunt de 3 cm și respectiv 12 cm. Fețele laterale formează cu planul bazei unghiuri de $60°$. Să se calculeze volumul trunchiului de piramidă și înălțimea piramidei din care provine trunchiul.

Varianta 2

Profilul pedagogic

SUBIECTUL I

1. Să se găsească toate perechile de numere naturale a căror sumă este 87 și pentru care 87 este divizibil cu diferența lor.

2. O fermă a vândut $\frac{1}{4}$ din cantitatea de roșii recoltată cu prețul de 7000 lei/kg, $\frac{5}{12}$ din cantitate cu 6000 lei/kg și $\frac{1}{8}$ din cantitate cu prețul de 5000 lei/kg, iar restul de 7125 kg cu prețul de 50400 lei/chintal. 16% din banii încasați se folosesc pentru investiții. Ce sumă s-a folosit pentru investiții?

3. La un concurs de matematică, Silviu a obținut 10 puncte. Știind că avea de rezolvat 8 probleme, iar pentru o problemă rezolvată corect a primit 3 puncte și pentru o problemă nerezolvată i s-au scăzut 4 puncte, aflați câte probleme a rezolvat Silviu.

SUBIECTUL II

1. Să se arate că numerele de forma $10^n + 18n - 28$ ($n \in \mathbb{N}$) sunt divizibile cu 27.

2. Pentru $x, y \in \mathbb{R}$ definim legea de compoziție $x \star y = ax + by - xy$. Determinați numerele reale a și b astfel încât legea de compoziție să fie comutativă și asociativă. Pentru valorile aflate, admite legea de compoziție element neutru? Dacă da, care sunt elementele simetrizabile?

SUBIECTUL III

1. Se dă pătratul $ABCD$ de latură a. Se iau punctele $E \in (BC)$ și $H \in (CD)$ astfel încât $m(\widehat{AEH}) = 90°$ și $m(\widehat{HAE}) = 30°$. Să se calculeze distanța EC și $m(\widehat{ADE})$.

2. Se dă prisma triunghiulară $ABCA'B'C'$, în care triunghiul ABC este echilateral de latură a, iar muchia AA' de lungime b, formează cu muchiile AB și AC unghiuri de măsură 45°. Notăm cu D proiecția lui A' pe planul (ABC). Demonstrați că $[AD$ este bisectoare a triunghiului ABC și aflați aria laterală a prismei.

Varianta 3

Profilul pedagogic

SUBIECTUL I

1. Într-o familie, tatăl are 46 ani, iar fiul său are 19 ani. Cu câți ani în urmă tatăl era de 4 ori mai în vârstă decât fiul său?

2. O echipă formată din 10 muncitori poate termina o lucrare în 20 de zile. După ce echipa lucrează 10 zile, 6 muncitori sunt trimiși să lucreze în altă parte. În cât timp vor termina lucrarea muncitorii rămași?

3. Un elev are un număr de fotografii. Vrând să le lipească pe filele unui album, constată că, dacă le lipește câte două sau câte cinci sau câte șapte, pe ultima filă a albumului rămân două fotografii. Să se afle care este numărul acestor fotografii, știind că el este cel mai mic număr cu aceste proprietăți.

SUBIECTUL II

1. Se consideră polinomul $f = X^4 - aX^3 + bX^2 + cX + d$, $f \in \mathbb{R}[X]$. Să se determine a, b, c, d astfel încât f împărțit la $X^2 - 3X - 1$ să dea restul $2X + 1$ și, împărțit la $X^2 - 1$, să dea restul $-2X + 2$.

2. Să se determine matricea X care satisface egalitatea:

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

SUBIECTUL III

1. Pe laturile triunghiului ABC se consideră punctele $M \in (BC)$ și $P \in (AB)$, astfel încât $MB = 2MC$ și $PA = PB$. Dacă O este intersecția dreptelor AM și CP, demonstrați că $OP = OC$ și $OA = 3OM$.

2. Secțiunea axială a unui trunchi de con este un trapez isoscel cu bazele de 20 cm și 12 cm, având diagonalele perpendiculare. Calculați aria laterală și volumul trunchiului de con, precum și volumul din care provine trunchiul.

Varianta 4

Profilul pedagogic

SUBIECTUL I

1. Determinați bazele de numerație x și y, știind că suma lor este 11 și că $231_x + 356_y = 1413_5$.

2. Împărțind numerele 1774, 2780 și 4687 cu același număr natural n, obținem respectiv resturile 10, 8 și 7. Să se determine numărul n.

3. Trei frați depun la o bancă 40000000 lei. Jumătate din suma depusă de fratele cel mare este egală cu o treime din suma depusă de fratele mijlociu și egală cu o cincime din suma depusă de fratele cel mic. Să se afle suma depusă de fiecare frate.

SUBIECTUL II

1. Să se rezolve ecuația $2\lg^2(x^2) - 3\lg x - 11 = 0$.

2. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât următorul sistem să admită și soluții diferite de soluția nulă și în acest caz să se rezolve:

$$\begin{cases} (m+1)x + y + z = 0 \\ x + 2(m-1)y - z = 0 \\ (m-1)x - y + z = 0 \end{cases}.$$

SUBIECTUL III

1. Diagonalele trapezului $ABCD$ ($AB \parallel CD$) se intersectează în O.

a) Să se arate că triunghiurile AOD și BOC au aceeași arie.

b) Paralela prin O la latura AB intersectează laturile AD și BC în M și respectiv N. Demonstrați că $MO = NO$.

2. Să se determine aria și volumul unui tetraedru regulat cu muchia de 10 cm.

Varianta 5

Profilul pedagogic

SUBIECTUL I

1. Să se afle două numere naturale a și b, știind că suma lor este 180 și că cel mai mare divizor comun al lor este 18.

2. Două robinete curgând împreună, pot umple $\frac{3}{4}$ dintr-un bazin în $5\frac{1}{4}$ ore. Primul robinet, curgând singur, umple $\frac{2}{5}$ din bazin în 4 ore. În cât timp va umple bazinul robinetul al doilea curgând singur?

3. O sfoară cu lungimea de $22\frac{1}{2}$ m trebuie să fie tăiată în trei bucăți astfel încât bucata a doua să fie de $3\frac{1}{2}$ ori mai mare decât prima, iar cea de-a treia de $2\frac{1}{4}$ ori mai mare decât prima. Să se afle lungimea fiecărei bucăți de sfoară.

SUBIECTUL II

1. Să se rezolve ecuația $\sqrt{2x+1} = 2\sqrt{x} - \sqrt{x-3}$.

2. Fie G mulțimea matricelor de forma $A = \begin{pmatrix} x & 3y \\ y & x \end{pmatrix}$, unde x, $y \in \mathbb{Q}$, $x \neq 0$ sau $y \neq 0$.

Arătați că înmulțirea matricelor este lege de compoziție pe G și verificați dacă, împreună cu operația indusă, G este grup abelian.

SUBIECTUL III

1. Se consideră trapezul isoscel $ABCD$ având $m(\hat{A}) = 60°$, circumscris unui cerc de rază R. Să se calculeze perimetrul și aria trapezului în funcție de R.

2. Aria totală a unui paralelipiped dreptunghic este de 142 cm^2, iar diagonala paralelipipedului este de $\sqrt{83}$ cm. Să se calculeze dimensiunile paralelipipedului, știind că ele sunt în progresie aritmetică.