BACALAUREAT 1999
Sesiunea IUNIE
Varianta 1

Profilurile matematică-fizică, informatică și metrologie

SUBIECTUL I

1. Se consideră expresia $E(x) = \log_2(2x^2) + \log_2 x(1 + \log_2 x) + \frac{1}{2}(\log_4 x^4)^2 + (\log_2 x)^3$.

a) Să se stabilească domeniul de existență al expresiei și să se arate că $E(x) = (1 + \log_2 x)^3$.

b) Să se rezolve ecuația $E(x) = -8$.

2. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 5 & 6 \\ 8 & 12 & 7 & m \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, unde m este un parametru real.

a) Să se calculeze determinantul matricei A.

b) Pentru $m = 8$ să se rezolve ecuația matriceală $A \cdot X = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, unde $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$.

3. Se consideră $w = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \in \mathbb{C}$ și mulțimea $\mathbb{Q}(w) = \{z = a + bw \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$.

a) Să se arate că pentru z_1, $z_2 \in \mathbb{Q}(w)$, $z_1 = a_1 + b_1 w$, $z_2 = a_2 + b_2 w$, este adevărată echivalența: $z_1 = z_2$ dacă și numai dacă $a_1 = a_2$ și $b_1 = b_2$.

b) Să se verifice că $w^2 + w + 1 = 0$ și $w^3 = 1$.

c) Să se demonstreze că $\mathbb{Q}(w)$ este parte stabilă a lui $\mathbb{C}$ față de operația de înmulțire a numerelor complexe și $\mathbb{Q}(w)$, împreună cu operația indusă, formează o structură de monoid comutativ.

SUBIECTUL II

1. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât ecuația $x \ln x - m = 0$ să eibă soluții reale.

2. Pentru $n \in \mathbb{N}$ se definesc funcțiile $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{x}{e^{2^n x}}$; fie $I_n = \displaystyle\int_0^{2^n} f_n(x)\, dx$.

a) Să se calculeze I_0.

b) Să se verifice relația $f_{n+1}(x) = \frac{1}{2} f_n(2x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

c) Să se arate că $I_{n+1} = \frac{1}{4} I_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

d) Determinați termenul general al șirului $s_n = I_0 + I_1 + \cdots + I_n$ și calculați limita sa.

SUBIECTUL III

În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(0, 2\sqrt{3})$, $B(-2, 0)$, $C(2, 0)$.

a) Să se reprezinte punctele și să se arate că triunghiul ABC este echilateral.

b) Să se determine coordonatele punctului D, simetricul lui C față de dreapta AB.

c) Să se scrie ecuația cercului de centru D și care trece prin A.

Varianta 2

Profilurile matematică-fizică, informatică și metrologie

SUBIECTUL I

1. Se consideră dezvoltarea $\left(\frac{\sqrt{2^x}}{\sqrt[16]{8}}+\frac{\sqrt[16]{32}}{\sqrt{2^x}}\right)^n$, $n\in\mathbb{N}^*$, $x\in\mathbb{R}$.

a) Determinați n astfel încât C_n^0, $\frac{C_n^1}{2}$, $\frac{C_n^2}{4}$ să fie termeni succesivi ai unei progresii aritmetice.

b) Pentru $n=8$, verificați dacă există valori ale lui x astfel încât diferența dintre termenii al șaselea și al patrulea ai dezvoltării să fie 56.

2. Rezolvați în mulțimea numerelor complexe ecuațiile (soluții sub formă algebrică):

a) $z^3+z^2+z+1=0$.

b) $\left(\frac{3z+1}{z-i}\right)^3+\left(\frac{3z+1}{z-i}\right)^2+\frac{3z+1}{z-i}+1=0$.

3. Se consideră mulțimea matricelor pătratice de ordinul trei peste $\mathbb{R}$ și submulțimea

$$G=\left\{A(x)=\begin{pmatrix}1&0&0\\x&1&0\\2x+2x^2&4x&1\end{pmatrix}\;\middle|\; x\in\mathbb{R}\right\}.$$

a) Să se arate că $A(x_1)\cdot A(x_2)=A(x_1+x_2)$, $\forall\, x_1,\, x_2\in\mathbb{R}$.

b) Să se demonstreze că G este parte stabilă a lui $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ față de operația de înmulțire a matricelor și G, împreună cu operația indusă, formează o structură de grup comutativ.

SUBIECTUL II

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\arctan x-\ln(1+x^2)$.

a) Să se arate că derivata funcției f este o funcție crescătoare.

b) Să se stabilească monotonia și punctele de extrem ale funcției f. Rezolvați inecuația $f(x)>0$.

2. **a)** Să se demonstreze că dacă funcția $f:[-a,a]\to\mathbb{R}$, $a>0$, este continuă și impară, atunci $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=0$.

b) Să se arate că $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\ln\frac{1+x}{1-x}\,dx=0$ și $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}x^2\sin x\,dx=0$.

c) Care este aria suprafeței plane limitate de graficul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2\sin x$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=-\frac{\pi}{4}$ și $x=\frac{\pi}{4}$?

SUBIECTUL III

În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(0,3)$ și $B(-6,0)$.

a) Scrieți ecuațiile medianelor duse din A și B și determinați coordonatele lui G, centrul de greutate al triunghiului AOB. Reprezentați punctele și dreptele.

b) Care este poziția centrului cercului circumscris; dar a ortocentrului triunghiului AOB? Demonstrați că aceste două puncte și G sunt coliniare.

Varianta 3

Profilurile matematică-fizică, informatică și metrologie

SUBIECTUL I

1. Se consideră șirul $a_n = \left(1-\frac{4}{1}\right)\cdot\left(1-\frac{4}{9}\right)\cdot\left(1-\frac{4}{25}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{4}{(2n-1)^2}\right)$, $n\in\mathbb{N}^*$. Să se demonstreze că $a_n = \frac{1+2n}{1-2n}$, $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$.

2. Se consideră polinomul $f\in\mathbb{R}[X]$, $f = X^4+2X^3+aX^2+bX+c$, a, b, c parametri.

a) Să se determine în funcție de coeficienți suma pătratelor rădăcinilor polinomului f.

b) Pentru $a=3$, să se arate că pentru orice b, $c\in\mathbb{R}$ polinomul f nu poate avea toate rădăcinile reale.

c) Să se determine a, b, $c\in\mathbb{Q}$, știind că restul împărțirii lui f la $X-1$ este egal cu 3 și f are rădăcina $-1+\sqrt{2}$. Pentru a, b, c determinați, rezolvați în mulțimea numerelor complexe ecuația $f(x)=0$.

3. Se consideră $\mathscr{M}_2(\mathbb{Z})$ mulțimea matricelor pătratice de ordinul doi peste $\mathbb{Z}$, submulțimea $G=\{A\in\mathscr{M}_2(\mathbb{Z}) \mid \det A = 1 \text{ sau } \det A = -1\}$ și legea de compoziție înmulțirea matricelor.

Admitem că G este parte stabilă a lui $\mathscr{M}_2(\mathbb{Z})$ față de operația de înmulțire a matricelor.

a) Precizați și justificați valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:
(1) $(\mathscr{M}_2(\mathbb{Z}),\cdot)$ are o structură de grup;
(2) $(G,\cdot)$ are o structură de grup.

b) Dacă A, $B\in\mathscr{M}_2(\mathbb{Z})$ sunt inversabile, să se arate că este adevărată echivalența:

$$A^{-1}\cdot B = B\cdot A^{-1} \Leftrightarrow A^{-1}\cdot B^{-1} = B^{-1}\cdot A^{-1}.$$

SUBIECTUL II

1. Să se reprezinte grafic funcția definită prin legea $f(x) = x\cdot e^{\frac{2}{x}}$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = a\cos\frac{x}{3} + b\sin\frac{x}{3}$, unde a, $b\in\mathbb{R}$.

a) Să se verifice că $9f'(x)+f(x)=0$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$.

b) Să se determine a și b astfel încât $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx = 0$ și $\int_0^{\pi} f(x)\,dx = 3$.

SUBIECTUL III

În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(3,0)$ și $B(0,2)$.

a) Să se determine coordonatele punctului D, mijlocul segmentului $[AB]$. Scrieți ecuația mediatoarei d a segmentului $[AB]$.

b) Să se determine coordonatele următoarelor puncte: $\{E\} = d\cap OB$, $\{F\} = d\cap OA$, M mijlocul segmentului $[AE]$ și N mijlocul segmentului $[BF]$.

Să se verifice dacă dreptele MD și ND sunt perpendiculare. Dar dreptele MO și NO?

Varianta 4

Profilurile matematică-fizică, informatică și metrologie

SUBIECTUL I

1. Să se rezolve următoarele ecuații:

a) $\dfrac{\sqrt{x+4}}{\sqrt{x-4}} + 2 \cdot \dfrac{\sqrt{x-4}}{\sqrt{x+4}} = \dfrac{11}{3}$;

b) $\sqrt{\dfrac{x+4}{x-4}} + 2 \cdot \sqrt{\dfrac{x-4}{x+4}} = \dfrac{11}{3}$.

2. Se consideră dezvoltarea $\left(x^2 - \dfrac{2}{x}\right)^n$, $x \in \mathbb{R}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se determine n astfel încât suma coeficienților primilor trei termeni ai dezvoltării să fie 97.

b) Pentru $n = 8$, verificați dacă există un termen care conține pe x^4. Justificați răspunsul.

3. Să se rezolve sistemul (S) $\begin{cases} x + 2y + z + t = 0 \\ 2x + y + z + 2t = 0 \\ x + 2y + 2z + t = 0 \\ x + y + z + t = 0 \end{cases}$.

SUBIECTUL II

1. Se consideră funcțiile $f,\ g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x^2+1) - \log_{\frac{1}{2}} x$, $g(x) = 2x^3 - 3x^2$.

a) Să se stabilească monotonia funcțiilor f ș g.

b) Determinați numărul de soluții reale ale ecuației $f(x) = g(x)$.

2. **a)** Să se demonstreze că suma a două funcții convexe $f,\ g : I \to \mathbb{R}$, unde I este un interval deschis, este o funcție convexă.

b) Să se arate că următoarele funcții sunt convexe:
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^4 + bx^2 + cx + d$, $a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{R}$, $a,\ b > 0$;
$g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = 4x^4 + 3x^2 - 5x + 7 + \log_{\frac{1}{5}} x$.

3. Se consideră șirul $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{4x^2+2x+1}\,dx$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Să se arate că $I_n \geq 0$, să se stabilească monotonia șirului și să se precizeze dacă șirul este convergent.

b) Determinați $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $\dfrac{1}{4x^2+2x+1} \leq a$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$. Arătați că $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$.

SUBIECTUL III

În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră elipsele de ecuații

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1 \text{ și } \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

a) Pentru fiecare elipsă să se scrie ecuația tangentei în punctul de abscisă 2 și ordonată pozitivă.

b) Să se arate că cele două tangente se intersectează într-un punct situat pe axa Ox.

c) Reprezentați grafic elipsele și tangentele.

Varianta 5

Profilurile matematică-fizică, informatică și metrologie

SUBIECTUL I

1. Să se rezolve inecuația $\sqrt{\log_3(9x-3)} \le \log_3\left(x-\frac{1}{3}\right)$.

2. **a)** Calculați determinantul $\Delta = \begin{vmatrix} x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, scriind rezultatul ca produs de factori.

b) Să se demonstreze că dacă polinomul $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = aX^2 + bX + c$ (a, b, c parametri) are trei rădăcini distincte, atunci $a = b = c = 0$.

c) Să se determine valorile parametrului m pentru care ecuația

$$(m^2-3m+2)x^2 - (m^2-5m+4)x + m - m^2 = 0$$

are cel puțin trei rădăcini distincte.

SUBIECTUL II

1. Se consideră expresia $f(x) = \ln\frac{1+x}{1-x}$.

a) Să se determine domeniul de definiție și domeniul de derivabilitate al funcției f definită prin legea $f(x)$.

b) Să se stabilească monotonia și punctele de inflexiune ale funcției f.

c) Precizați semnul funcției f și calculați aria suprafeței plane limitate de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x = -\frac{1}{2}$ și $x = \frac{1}{2}$.

2. Se consideră șirul $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)^n \, dx$, $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$.

a) Să se calculeze I_2 și să se demonstreze că

$$I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}, n \ge 2.$$

b) Să se arate că $I_n \ge 0$, să se stabilească monotonia șirului și să se precizeze dacă șirul este convergent.

c) Demonstrați că $I_{n+2} \le \frac{1}{n+1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ și calculați limita șirului $(I_n)_{n\ge 2}$.

SUBIECTUL III

În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră elipsele de ecuații

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \text{ și } \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

a) Pentru fiecare elipsă să se scrie ecuația tangentei în punctul de abscisă 3 și ordonată negativă.

b) Să se arate că cele două tangente se intersectează într-un punct situat pe axa Ox.

c) Reprezentați grafic elipsele și tangentele.

Varianta 1

Profilurile economic, fizică-chimie și chimie-biologie

SUBIECTUL I

1. Să se rezolve inecuația $\log_{\frac{1}{2}} x^2 \geq \log_{\frac{1}{2}}(x+2)$.

2. Se consideră ecuația $x = \left(2 - \dfrac{x+1}{x-7}\right)^2$, $x \neq 7$. Să se rezolve ecuația în mulțimea numerelor complexe, știind că admite soluția $z = 3 + 4i$.

3. Se consideră $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ mulțimea matricelor pătratice de ordin trei peste $\mathbb{R}$ și submulțimea sa

$$B = \left\{ A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix} \middle| \, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

a) Să se demonstreze că B este parte stabilă a lui $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ față de operațiile de adunare și de înmulțire a matricelor.

b) Să se demonstreze că $(B, +, \cdot)$ formează o structură de inel comutativ.

c) Inelul $(B, , \cdot)$ are divizori ai lui zero? Justificați răspunsul.

SUBIECTUL II

1. Se consideră șirurile definite astfel: $a_n = 3^{-n}$, $b_n = \ln(a_n)$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se arate că șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este o progresie geometrică, iar $(b_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică. Determinați primul termen și rația fiecărei progresii.

b) Să se calculeze limitele șirurilor $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ și $t_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Se consideră funcția $f : I \to \mathbb{R}$ (I interval deschis), derivabilă de douăori pe I.

a) Enunțați teorema lui Rolle.
Să se arate că între două puncte de extrem succesive există cel puțin un zerou al derivatei de ordinul al doilea.

b) Pentru funcția $f : (-2, 1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = (2x^2 - 3x + 2)e^x$, să se determine punctele de extrem și de inflexiune.

3. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 3$. Să se calculeze aria suprafeței plane limitate de graficul funcției f, tangenta la grafic în punctul de abscisă 2 și dreptele de ecuații $x = 0$, $x = 2$.

SUBIECTUL III

În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(0, 4)$, $B(-2, 0)$ și $C(3, 0)$.

a) Reprezentați punctele și calculați distanțele BC și AC.

b) Să se scrie ecuațiile mediatoarelor segmentelor $[AB]$ și $[BC]$.

c) Determinați centrul și raza cercului circumscris triunghiului ABC.

Varianta 2

Profilurile economic, fizică-chimie și chimie-biologie

SUBIECTUL I

1. Să se rezolve ecuația $\log_x \sqrt{5} + \log_x(5x) = \dfrac{9}{4} + \left(\log_x \sqrt{5}\right)^2$.

2. Se consideră dezvoltarea $\left(x\sqrt{x} + \dfrac{1}{x^4}\right)^n$, $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$, $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$.

a) Să se determine n astfel încât $C_n^2 = C_n^1 + 44$.

b) Pentru $n = 11$, verificați dacă există un termen al dezvoltării care nu conține pe x. Justificați răspunsul.

3. Se consideră $w = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \in \mathbb{C}$ și matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & w & w^2 & w^3 \\ w & w^2 & w^3 & 1 \\ w^2 & w^3 & 1 & w \\ w^3 & 1 & w & w^2 \end{pmatrix}$.

a) Să se verifice că $w^2 + w + 1 = 0$ și $w^3 = 1$.

b) Să se arate că $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

SUBIECTUL II

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3^{-2x} - 2 \cdot 3^{-x}$.

a) Să se calculeze limitele funcției spre $+\infty$ și $-\infty$.

b) Să se stabilească domeniul de derivabilitate și să se calculeze derivata funcției f. Precizați monotonia și punctele de extrem ale funcției f.

c) Să se determine punctele de inflexiune ale funcției f.

2. Se consideră integrala $I = \displaystyle\int_1^2 \left(m^2 + (4 - 4m)x + 4x^3\right) dx$, unde m este un parametru real.

a) Să se calculeze integrala.

b) Să se determine m astfel ca $I \leq 12$.

SUBIECTUL III

În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctul $M(2, 3)$ și dreptele de ecuații $d_1 : x + y - 2 = 0$ și $d_2 : 3x - 2y + 1 = 0$. Se notează cu A punctul de intersecție al dreptelor d_1 și d_2.

a) Să se determine coorodnatele punctului A. Să se reprezinte grafic dreptele d_1 și d_2.

b) Să se scrie ecuația dreptei AM.

c) Să se scrie ecuația dreptei care trece prin A și este paralelă cu prima bisectoare.

Varianta 3

Profilurile economic, fizică-chimie și chimie-biologie

SUBIECTUL I

1. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât inegalitatea $\dfrac{2x^2+2x+3}{x^2+x+1} \leq a$ să fie adevărată pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

2. Se consideră ecuația cu coeficienți reali $x^4 - 7x^3 + 21x^2 + ax + b = 0$, a, $b \in \mathbb{R}$. Dacă $z = 1 + 2i$ este o rădăcină a ecuației, să se determine parametri reali a și b, și să se rezolve ecuația.

3. Se consideră $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ mulțimea matricelor pătratice de ordin doi peste $\mathbb{R}$, matricea $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$ și submulțimea $G = \{B = aA + bI_2 \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

a) Să se arate că $A^2 = 2A - I_2$.

b) Să se demonstreze că G este parte stabilă a lui $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ în raport cu operația de înmulțire a matricelor și că $(G, \cdot)$ are o structură de monoid. Legea este comutativă pe G? Justificați răspunsul.

SUBIECTUL II

1. Se consideră progresia geometrică $(b_n)_{n\geq 1}$ cu $b_1 > 0$, cu rația $q \in (0,1)$ și sumele $S_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ și $T_n = b_1^3 + b_2^3 + \cdots + b_n^3$.

a) Să se calculeze S_n și T_n în funcție de b_1 și q.

b) Știind că $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 3$ și $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = \dfrac{108}{13}$, să se afle primul termen b_1 și rația q.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 7 + 2x \ln 25 - 5^{x-1} - 5^{2-x}$.

a) Să se stabilească domeniul de derivabilitate al funcției și să se calculeze derivata funcției f. Precizați monotonia și punctele de extrem ale funcției f.

b) Determinați numărul punctelor de inflexiune.

3. Se consideră funcția $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - \dfrac{\ln x}{x} - \dfrac{1}{x}$.

a) Să se rezolve inecuația $f(x) \geq 1$.

b) Calculați aria suprafeței plane limitate de graficul funcției f, dreptele $y = 1$, $x = \dfrac{1}{x^2}$ și $x = \dfrac{1}{e}$.

SUBIECTUL III

În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră cercul $\mathscr{C}$ de ecuație $x^2 + (y-4)^2 = 16$.

a) Precizați centrul și raza cercului $\mathscr{C}$; reprezentați cercul.

b) Să se verifice, prin calcul, că punctul $A(0, -2)$ nu aparține cercului.

Să se determine coordonatele punctelor B situate pe cerc, astfel încât tangenta în B la cerc să treacă prin A.

c) Scrieți ecuațiile tangentelor la cerc. Determinați pantele tangentelor.

Varianta 4

Profilurile economic, fizică-chimie și chimie-biologie

SUBIECTUL I

1. Se consideră dezvoltarea $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

- **a)** Să se determine n, știind că suma primilor trei coeficienți ai dezvoltării este 46.
- **b)** Pentru $n = 9$, verificați dacă există un termen al dezvoltării care nu conține pe x.

2. Se consideră relația $x^2 + 2tx - 3t^2 = 0$.

- **a)** Determinați x în funcție de t.
- **b)** Rezolvați în mulțimea numerelor complexe ecuația

$$(z^2 + 2x + 1)^2 + 2z(z^2 + 2z + 1) - 3z^2 = 0.$$

3. Se consideră sistemul (S) $\begin{cases} 3x + 4y + z + 2t = 3 \\ 6x + 8y + 2z + 5t = 7 \\ 9x + 12y + 3z + 10t = 13 \end{cases}$.

- **a)** Sistemul admite soluțiile $x = -1$, $y = 1$, $z = 0$, $t = 1$, respectiv $x = 1$, $y = 0$, $z = -2$, $t = 1$? Justificați răspunsul.
- **b)** Să se rezolve sistemul.

SUBIECTUL II

1. Se consideră expresia $f(x) = \dfrac{x^3+4}{x^2}\cdot$

- **a)** Să se reprezinte grafic funcția f definită prin legea f.
- **b)** Să se discute în funcție de parametrul real m numărul soluțiilor reale ale ecuației $f(x) = m$.

2. **a)** Se consideră funcția $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$, unde $a > 0$, continuă. Justificați următoarele afirmații:

(1) Dacă f este funcție pară, atunci $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2 \cdot \int_{0}^{a} f(x)\,dx$;

(2) Dacă f este funcție impară, atunci $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.

b) Să se calculeze următoarele integrale:

$$I = \int_{-2}^{2} x^2 e^{|x|}\,dx \text{ și } J = \int_{-2}^{2} x^3 e^{|x|}\,dx.$$

SUBIECTUL III

În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctul $M(5, 0)$ și elipsa de ecuație $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$.

- **a)** Reprezentați elipsa și precizați, prin calcul, poziția punctului M față de elipsă.
- **b)** Să se determine coordonatele punctelor P situate pe elipsă, astfel încât tangenta în P la elipsă să treacă prin M.
- **c)** Scrieți ecuațiile tangentelor la elipsă. Determinați pantele tangentelor.

Varianta 5

Profilurile economic, fizică-chimie și chimie-biologie

SUBIECTUL I

1. Să se rezolve ecuația $3\log_x 4 + 2\log_{4x} 4 + 3\log_{16x} 4 = 0$.

2. Să se rezolve inecuația $a^2 - 9^{x+1} - 8 \cdot 3^x \cdot a > 0$, unde a este parametru real, $a > 0$.

3. Se consideră sistemul (S) $\begin{cases} 2x - \ \ y + 5z + 7t = 0 \\ 4x - 2y + 7z + 5t = 0 \\ 2x - \ \ y + \ \ z - 5t = 0 \end{cases}$.

a) Sistemul admite soluțiile $x = -8$, $y = 8$, $z = -3$, $t = 1$, respectiv $x = 4$, $y = 8$, $z = 0$, $t = 0$? Justificați răspunsul.

b) Să se rezolve sistemul.

SUBIECTUL II

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = m^2x^3 + mx^2 - x - 3$, m parametru real nenul.

a) Să se arate că pentru orice $m \in \mathbb{R}^*$, funcția are două puncte de extrem.

b) Pentru $m = -\dfrac{1}{3}$, reprezentați grafic funcția obținută.

2. Se consideră șirurile $(I_n)_{n\geq 1}$ și $(J_n)_{n\geq 1}$ definite astfel:

$$I_n = \int_1^e x^n \ln x \, dx \text{ și } J_n = \int_1^e x^n (\ln x)^2 \, dx.$$

a) Să se determine I_n. Să se stabilească o relație între I_n și J_n.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{I_n - J_n}{e^{n+1}}$.

SUBIECTUL III

În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(-1, 2)$ și $B(1, 4)$.

a) Să se determine ecuația cercului $\mathscr{C}$ de centru A și care trece prin B. Reprezentați cercul $\mathscr{C}$.

b) Să se scrie ecuațiile tangentelor la cerc în punctele care au abscisa $x = -1$.

c) Să se arate că tangentele sunt paralele cu axa Ox.

Varianta 1

Profilurile industrial, agricol, silvic și sportiv-real

SUBIECTUL I

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + ax + b$, a și b parametri reali. Să se determine a și b astfel încât să fie îndeplinite simultan următoarele condiții:

- graficul funcției să intersecteze dreapta $y = 3x - 4$ în punctul de abscisă 1;
- ordonata vârfului parabolei să fie egală cu 1.

2. Se consideră a, b, c și x numere reale strict pozitive și diferite de 1. Să se demonstreze că următoarea echivalență este adevărată:

a, b, c sunt termeni succesivi ai unei progresii geometrice dacă și numai dacă $\dfrac{1}{\log_a x}$, $\dfrac{1}{\log_b x}$ și $\dfrac{1}{\log_c x}$ sunt termenii succesivi ai unei progresii aritmetice.

3. Se consideră determinantul $\Delta(x) = \begin{vmatrix} 1-x & x^2 & x \\ x & x & -x \\ 1+x^2 & x^2 & -x^2 \end{vmatrix}$.

a) Să se arate că $\Delta(-1) = 0$.

b) Să se rezolve ecuația $\Delta(x) = 0$.

SUBIECTUL II

1. Se consideră expresia $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$.

a) Să se determine domeniul funcției f definită prin legea $f(x)$.

b) Să se stabilească domeniul de derivabilitate și să se calculeze derivata funcției f. Precizați monotonia și punctele de extrem ale funcției f.

c) Stabiliți intervalele de convexitate (concavitate) ale funcției.

2. Să se determine primitivele următoarelor funcții:

a) $f : (4, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{4x - 10}{x^2 - 5x + 4}$;

b) $f : (e^4, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{4 \ln x - 10}{x(\ln^2 x - 5 \ln x + 4)}$.

SUBIECTUL III

În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră triunghiul care are laturile pe dreptele $AB:\ 2x + 3y - 7 = 0$, $BC:\ x - 4y + 13 = 0$ și $AC:\ 4x - 5y - 3 = 0$.

a) Determinați coordonatele vârfurilor triunghiului. Reprezentați triunghiul ABC.

b) Scrieți ecuațiile mediatoarelor segmentelor $[AB]$ și $[BC]$.

c) Determinați coordonatele centrului cercului circumscris triunghiului ABC.

Varianta 2

Profilurile industrial, agricol, silvic și sportiv-real

SUBIECTUL I

1. Să se rezolve în mulțimea numerelor complexe ecuațiile:

a) $t^2 - 7t + 6 = 0$;

b) $(-x^2 + 2x)^2 - 7(-x^2 + 2x) + 6 = 0$.

2. Să se rezolve ecuațiile:

a) $9^{x^2-1} - 36 \cdot 3^{x^2-3} + 3 = 0$;

b) $\log_x \sqrt{5} + \log_x(5x) - 2,25 = (\log_x \sqrt{5})^2$.

3. Să se calculeze determinantul $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

SUBIECTUL II

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x}(x^2 + x - 5)$.

a) Calculați limitele funcției spre $-\infty$ și ∞.

b) Să se stabilească domeniul de derivabilitate și să se calculeze derivata funcției f.

c) Precizați monotonia și punctele de extrem ale funcției f. Alcătuiți tabelul de variație al funcției.

2. Să se calculeze limita $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{8 + 3x} - 2}{\sqrt[4]{16 + 5x} - 2}$.

3. Să se calculeze integrala $I = \displaystyle\int_1^4 \ln \frac{5 - x}{4x}\, dx$.

SUBIECTUL III

În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră cercul $\mathscr{C}$ de ecuație $x^2 + y^2 = 16$ și punctul $A(1, 2)$.

a) Determinați centrul și raza cercului. Precizați, prin calcul, poziția punctului A față de cerc. Reprezentați cercul.

b) Scrieți ecuația dreptei d care trece prin A și centrul cercului.

c) Fie $M(a, b)$ un punct pe cerc. Determinați punctul M astfel încât tangenta la cerc în M să fie paralelă cu dreapta d.

Varianta 3

Profilurile industrial, agricol, silvic și sportiv-real

SUBIECTUL I

1. Să se rezolve sistemul $\begin{cases} \dfrac{1}{x+2y}+y=2 \\ \\ \dfrac{y}{x+2y}=-3 \end{cases}$.

2. Să se rezolve ecuația $1+2\log_{x+2}5=\log_5(x+2)$.

3. Se consideră $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ mulțimea matricelor pătratice de ordin doi peste $\mathbb{R}$ și submulțimea

$$G=\left\{M(a,b)\ \middle|\ M(a,b)=\begin{pmatrix} a+b & 4b \\ -b & a-b \end{pmatrix},\ a,b\in\mathbb{R}\right\}.$$

a) Să se demonstreze că G este parte stabilă a lui $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ față de operația de adunare a matricelor.

b) Să se arate că $(G,+)$ este grup comutativ.

SUBIECTUL II

1. Se consideră funcția $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln(1-x^2)$.

a) Să se calculeze limitele la capetele domeniului de definiție.

b) Să se stabilească domeniul de derivabilitate și să se calculeze derivata funcției f. Precizați monotonia și punctele de extrem ale funcției f.

c) Să se stabilească intervalele de convexitate (concavitate).

2. Să se calculeze limita $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+5x+4}{x^2-3x+7}\right)^x$.

3. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{-x}(x+1)$.

a) Să se stabilească semnul funcției f.

b) Să se calculeze aria suprafeței plane limitate de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=-2$ și $x=0$.

SUBIECTUL III

În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(5,0)$, $B(1,4)$ și dreapta d de ecuație $x+y-3=0$.

a) Reprezentați dreapta și punctele.

b) Scrieți ecuația mediatoarei segmentului $[AB]$ și determinați intersecția ei cu dreapta d.

c) Să se stabilească ecuația cercului care trece prin A, B și are centrul pe dreapta d.

Varianta 4

Profilurile industrial, agricol, silvic și sportiv-real

SUBIECTUL I

1. Să se determine soluțiile reale ale ecuației $3^{x^3-3x^2-4x+9}=\frac{1}{27}$.

2. Se consideră șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ progresie geometrică cu rația $q\in(0,1)$ și $a_1\neq 0$.

a) Să se determine în funcție de a_1 și q suma $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$ și să se calculeze limita sa.

b) Să se determine rația progresiei, știind că $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=3\cdot S_3$.

3. Se consideră sistemul $\begin{cases} 2x-y+z-t=1\\ x+y+az+t=-1\\ x-y+z-t=b\end{cases}$, a și b parametri reali.

a) Să se determine a și b astfel încât matricea sistemului să fie de rang 2, iar sistemul să fie compatibil.

b) Pentru $a=-1$ și $b=1$ să se rezolve sistemul.

SUBIECTUL II

1. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=2\ln x+x^2-4x+m$, m parametru real.

a) Să se stabilească domeniul de derivabilitate al funcției și să se rezolve ecuația $f'(x)=0$.

b) Să se discute, în funcție de parametrul real m, numărul de soluții reale ale ecuației $f(x)=0$.

2. Să se determine primitivele următoarelor funcții:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x(3x^2-2x-5)$.

b) $f:(-1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x^2+3x+2}$.

SUBIECTUL III

În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră dreapta d de ecuație $4x+3y-12=0$.

a) Determinați coordonatele punctelor A și B, intersecțiile dreptei d cu axele Ox, respectiv Oy. Reprezentați dreapta. Precizați panta dreptei AB.

b) Știind că $[AB]$ este latura unui trapez dreptunghic $ABCD$, cu $m(\sphericalangle A)=90°$ și $BC\parallel AD$, având toate vârfurile pe axele de coordonate, scrieți ecuațiile dreptelor BC și CD.

c) Determinați coordonatele punctelor C și D.

Varianta 5

Profilurile industrial, agricol, silvic și sportiv-real

SUBIECTUL I

1. Se consideră dezvoltarea $(x + x^{\lg x})^5$, $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$. Să se determine x, știind că al treilea termen al dezvoltării este 10^6.

2. Se consideră ecuația $x^3 - 2x^2 + x - 2 = 0$ cu rădăcinile x_1, x_2, x_3.

a) Să se rezolve ecuația în mulțimea numerelor complexe.

b) Să se determine ecuația de gradul al treilea care are rădăcinile: $y_1 = x_2 + x_3 + 2x_1$, $y_2 = x_1 + x_3 + 2x_2$, $y_3 = x_1 + x_2 + 2x_3$.

3. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 2 & 10 & 8 \\ 3 & 15 & 12 \end{pmatrix}$.

a) Să se determine rangul matricei A.

b) Să se studieze compatibilitatea sistemului (S) $\begin{cases} x + 5y + 4z = 1 \\ 2x + 10y + 8z = 3 \\ 3x + 15y + 12z = 5 \end{cases}$.

SUBIECTUL II

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R}\backslash\{-3\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2 + ax}{(x+3)^2}$, a parametru real.

a) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât tangenta la graficul funcției f în punctul de abscisă 1 să fie paralelă cu axa Ox.

b) Pentru $a = -3$, să se reprezinte grafic funcția f (folosind derivata a II-a).

2. Se consideră funcțiile f, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$, $g(x) = 2\ln(1 + e^x) - x$.

a) Să se arate că funcția g este o primitivă a funcției f.

b) Să se stabilească semnul funcției f pe intervalul $[-1, 1]$. Să se calculeze aria suprafeței plane limitate pe graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x = -1$ și $x = 1$.

SUBIECTUL III

În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctul $B(1, 4)$ și dreptele d_1, d_2 de ecuații $d_1 : x + y - 5 = 0$, $d_2 : x - y - 1 = 0$.

a) Să se determine coordonatele lui A, punctul de intersecție al celor două drepte. Reprezentați dreptele și calculați lungimea segmentului $[AB]$.

b) Scrieți ecuația cercului de centru A și care trece prin B.

Varianta 1

Profilul uman

SUBIECTUL I

1. Să se rezolve ecuațiile:

a) $2^{2x-3} = 4^{x^2-3x-1}$.

b) $\lg(x-3) + \lg(x+6) = \lg 2 + \lg 5$.

2. Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ în care $a_9 = 5 \cdot a_2$ și $a_{13} = 2 \cdot a_6 + 5$.

a) Să se determine primul termen și rația progresiei.

b) Să se calculeze suma primilor 100 de termeni ai progresiei.

3. Se consideră submulțimea numerelor reale $G = [2, \infty)$ și operația

$$x \star y = xy - 2(x+y) + 6,\ (\forall)\, x, y \in G.$$

a) Să se arate că operația "$\star$" este lege de compoziție pe G.

b) Să se demonstreze că legea este asociativă și admite element neutru. Care sunt elementele simetrizabile în raport cu această lege?

SUBIECTUL II

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{(x-2)(2x+1)}{x^2}$.

a) Să se stabilească monotonia și punctele de extrem ale funcției f.

b) Graficul funcției f admite puncte de inflexiune? Justificați răspunsul.

2. Să se calculeze următoarele limite:

a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-7x+10}{x^2-8x+12}$.

b) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{2^x+3}{2^x-3}$.

c) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{2^x+3}{2^x-3}$.

3. S ă se determine $b \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ astfel încât $\displaystyle\int_1^b (b-4x)\, dx = 6 - 5b$.

SUBIECTUL III

În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctul $M\left(-\dfrac{4}{5}, 1\right)$ și dreptele d_1 și d_2 de ecuații d_1 : $x + 6y + 5 = 0$ și $d_2 :\ 3x - 2y + 1 = 0$.

a) Să se reprezinte dreptele.

b) Determinați coordonatele punctului A, intersecția dreptelor d_1 și d_2.

c) Scrieți ecuația dreptei AM. Scrieți ecuația cercului de centru A și care trece prin M.

Varianta 2

Profilul uman

SUBIECTUL I

1. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale următoarele ecuații:

a) $\dfrac{6}{x^2-1} - \dfrac{2}{x-1} = 2 - \dfrac{x+4}{x+1}$.

b) $4^x - 10 \cdot 2^{x-1} = 24$.

2. Se consideră a, $b \in \mathbb{R}$, a, $b > 0$, astfel încât $a^2 + 4b^2 = 12ab$. Să se arate că este adevărată relația $2\lg(a+2b) - 4\lg 2 = \lg a + \lg b$.

3. Să se rezolve sistemul $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - y + 3z = 9 \\ -3x + 4y + 2z = 11 \end{cases}$.

SUBIECTUL II

1. Să se calculeze următoarele limite:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+2}{x-1} + \dfrac{2-3x^2}{x^2+1} \right)$.

b) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{\sqrt{x-2}-1}$.

2. Să se construiască graficul funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -3x^3 + x + 4$ (utilizând derivata a doua).

3. Se consideră funcția $f : (-\infty, 3) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2}{2} - 3x + \dfrac{2}{(x-3)^2}$.

a) Determinați primitivele funcției f.

b) Precizați primitiva F care verifică egalitatea $F(-1) = 0$.

SUBIECTUL III

În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(1,2)$, $B(3,1)$, $C(2,-1)$.

a) Reprezentați punctele. Scrieți ecuația dreptei AB. Verificați, prin calcul, că punctele A, B, C sunt necoliniare.

b) Calculați distanțele AB, AC și BC. Demonstrați că triunghiul ABC este dreptunghic.

c) Precizați coordonatele centrului și raza cercului circumscris triunghiului ABC.

Varianta 3

Profilul uman

SUBIECTUL I

1. Se consideră dezvoltarea $\left(9x - \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{x}}\right)^n$, $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$ și $n \in \mathbb{R}$, $n \geq 3$.

a) Să se determine $n \in \mathbb{N}^*$, astfel încât coeficientul binomial al termenului al treilea să fie 105.

b) Pentru $n = 15$, verificați dacă există un termen al dezvoltării care conține pe x^5. Justificați răspunsul.

2. Se consideră ecuația $x^4 + x^3 + x^2 - x - 2 = 0$.

a) Să se determine rădăcinile raționale ale ecuației.

b) Să se rezolve ecuația în mulțimea numerelor complexe.

3. Să se discute în funcție de parametrul real m și să se rezolve sistemul $\begin{cases} x + \ \ my = \qquad 1 \\ mx - 3my = 2m + 3 \end{cases}$.

SUBIECTUL II

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$.

a) Să se stabilească monotonia și punctele de extrem ale funcției f.

b) Calculați limitele funcției spre $+\infty$ și $-\infty$.

2. Se consideră șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ definit astfel $a_n = \ln n - \ln(n + 1)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Calculați suma $S = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$.

b) Să se determine termenul general al șirului $(S_n)_{n \geq 1}$, unde $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, $n \in \mathbb{N}$. Stabiliți dacă șirul are limită și, în caz afirmativ, calculați această limită.

3. Se consideră funcția $f : [1, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1 + 3x - 4x^2}{x}$. Să se calculeze aria suprafeței plane limitate de graficul funcției f și axa Ox.

SUBIECTUL III

În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A\left(-2, \frac{5}{2}\right)$ și $B(3, 1)$.

a) Scrieți ecuația carteziană a dreptelor d_1 și d_2 care îndeplinesc condițiile:

- $A \in d_1$ și are panta $\frac{3}{5}$;
- $B \in d_2$ și are panta $-\frac{5}{3}$.

b) Reprezentați dreptele d_1 și d_2.

c) Calculați lungimea segmentului $[AB]$. Scrieți ecuația cercului de centru A și care trece prin B.

Varianta 4

Profilul uman

SUBIECTUL I

1. Să se rezolve următoarele ecuații:

a) $\left(\frac{1}{x}+2\right)^2+\frac{1}{x}-10=0$;

b) $\log_4(x+3)-\log_4(x-1)=2-\log_4 8$.

2. **a)** Să se determine numerele reale x și y care verifică simultan relațiile:

$$x\cdot y=192,\ x\cdot y-x=189.$$

b) Se consideră progresia geometrică $(b_n)_{n\geq 1}$ cu rația $q=2$. Să se determine $n\in\mathbb{N}$ astfel încât $b_n=96$ și suma primilor n termeni ai progresiei să fie egală cu 189.

3. Se consideră ecuația $x^4-2x^3-x^2-10x+12=0$.

a) Să se determine soluțiile raționale ale ecuației.

b) Să se rezolve ecuația în mulțimea numerelor complexe.

SUBIECTUL II

1. Să se construiască graficul funcției $f:\mathbb{R}\backslash\{0\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{-x^2+3x-2}{x^2}\cdot$

2. Să se calculeze integrala $I=\displaystyle\int_1^2(x^2-x)e^x\,dx$.

SUBIECTUL III

În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră dreptele d_1 și d_2 de ecuații $d_1:\ y=2x+4$, respectiv $d_2:\ y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$.

a) Determinați coordonatele punctului A, intersecția dreptelor d_1 și d_2. Reprezentați dreptele. Precizați pantele dreptelor.

b) Să se determine punctele B și C care îndeplinesc condițiile:

- $B\in d_1$ și are abscisa -5;
- $C\in d_2$ și are ordonata -1.

Calculați lungimea segmentului BC.

Varianta 5

Profilul uman

SUBIECTUL I

1. Să se rezolve următoarele ecuații:

a) $15 \cdot 2^{x+1} + 15 \cdot 2^{-x+2} = 135$.

b) $4(\log_3 x)^2 - 17\log_3 x + 4 = 0$.

2. **a)** Să se determine funcția de gradul al doilea, știind că graficul funcției trece prin punctele $A(-1, 6)$, $B(2, 3)$, $C\left(-\frac{1}{2}, 3\right)$.

b) Considerând funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$, să se determine punctele de intersecție ale graficului funcției cu axele de coordonate.

3. Se consideră submulțimea numerelor reale $G = (-1, \infty)$ și operația

$$x \star y = xy + x + y, \forall x, y \in G.$$

a) Să se arate că operația "$\star$" este lege de compoziție pe G.

b) Să se demonstreze că $(G, \star)$ formează o structură de grup comutativ.

SUBIECTUL II

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R}\backslash\{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2-2x+1}$.

a) Să se stabilească monotonia și punctele de extrem ale funcției f.

b) Să se calculeze limitele laterale ale funcției în punctul $x = 1$.

c) Să se calculeze limitele funcției spre $+\infty$ și $-\infty$.

2. Se consideră funcțiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 5x + 3$ și $g(x) = 3 + 3x - x^2$.

a) Să se rezolve inecuația $f(x) \leq g(x)$.

b) Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între graficele celor două funcții și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = 4$.

SUBIECTUL III

În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(4, 6)$, $B(4, 0)$, $C(-4, 0)$.

a) Reprezentați punctele și arătați că triunghiul ABC este dreptunghic.

b) Scrieți ecuația cercului circumscris triunghiului ABC. Precizați centrul și raza cercului. Punctul $E(-5, 2)$ aparține cercului? Justificați, prin calcul, răspunsul.

Sesiunea AUGUST
Varianta 1

Profilul uman

SUBIECTUL I

1. Se consideră ecuațiile:

$$ax^2 + bx + c = 0, \tag{1}$$

$$2a^2x^2 + 2abx + b^2 - 2ac = 0,\ a, b, c, \in \mathbb{R} \text{ și } a \neq 0. \tag{2}$$

a) Să se arate că este adevărată următoarea echivalență:
ecuația (1) are rădăcini reale și distincte dacă și numai dacă ecuația (2) are rădăcini complexe.

b) Să se rezolve în $\mathbb{C}$ ecuațiile: $t^2 - 5t + 4 = 0$ și $2z^2 - 10z + 17 = 0$.

2. Să se rezolve următoarele ecuații:

a) $15 \cdot 2^{x+1} + 15 \cdot 2^{-x+2} = 135$.

b) $4(\log_3 x)^2 - 17 \log_3 x + 4 = 0$.

3. Se consideră mulțimea $G = [3, \infty)$ pe care se definește operația $x \star y = \sqrt{x^2 + y^2 - 9}$, $\forall\ x,\ y \in G$.

a) Să se arate că operația "$\star$" este lege de compoziție pe G.

b) Să se arate că legea este asociativă, comutativă și admite element neutru. Care sunt elementele simetrizabile în raport cu această lege?

SUBIECTUL II

1. Să se construiască graficul funcției f definite prin legea $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 5x + 6}$, folosind și derivata a doua.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R}\backslash\{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{kx^2 + \ell}{x - 1} + mx$, $k,\ \ell,\ m$ parametri reali. Să se determine $k,\ \ell,\ m \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(2) = 23,\ f'(0) = 4$ și $\displaystyle\int_{-1}^{0} (x - 1)f(x)\, dx = \frac{37}{6}$.

SUBIECTUL III

În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(1, -1)$, $B(-2, 1)$ și $C(3, 5)$.

a) Reprezentați punctele. Verificați prin calcul dacă triunghiul ABC este isoscel.

b) Să se determine panta dreptei BC. Să se scrie ecuația dreptei care trece prin A și are panta dreptei BC.

c) Să se scrie ecuația cercului de centru C și care trece prin A.

Varianta 2

Profilul uman

SUBIECTUL I

1. Se consideră dezvoltarea $(\sqrt[3]{a} + a\sqrt{a})^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$.

a) Să se determine n astfel încât coeficientul binomial al termenului al treilea să fie 36.

b) Pentru $n = 9$, verificați dacă există un termen al dezvoltării care conține pe a^3.

2. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuațiile:

a) $\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{2}{x^2 - x + 1} = \dfrac{1-2x}{1+x^2}$.

b) $\left(\dfrac{3}{5}\right)^{x+1} + \left(\dfrac{3}{5}\right)^{1-x} = 1,2$.

3. Se consideră mulțimea numerelor reale pe care se definește legea de compoziție

$$x \star y = xy - x - y + 2,\ \forall\, x, y \in \mathbb{R}.$$

Să se cerceteze dacă legea este comutativă, asociativă și dacă admite element neutru. Există elemente simetrizabile?

SUBIECTUL II

1. Se consideră șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit astfel: $a_1 = -2$ și $a_{n+1} = 4a_n$, $n \geq 1$. Notăm cu S_n suma primilor n termeni.

a) Să se arate că șirul este progresie geometrică și să se calculeze suma S_n în funcție de n.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{S_n}{S_{n+1}}$.

2. Se consideră expresia $f(x) = \dfrac{-8(x+2)}{x^2 + 4x + 8}$.

a) Să se precizeze domeniul maxim al funcției definite prin expresia $f(x)$.

b) Să se stabilească intervalele de convexitate (concavitate) și punctele de inflexiune ale funcției f.

3. Să se determine valoarea numărului real pozitiv a astfel încât $\displaystyle\int_0^2 (x - \log_2 a)\, dx = 2\log_2 \frac{2}{a}$.

SUBIECTUL III

În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A\left(-2, \dfrac{5}{2}\right)$ și $B(3, 1)$.

a) Scrieți ecuația carteziană a dreptelor d_1 și d_2 care îndeplinesc condițiile:

d_1 are panta $\dfrac{3}{5}$ și $A \in d_1$; d_2 are panta $-\dfrac{3}{5}$ și $B \in d_2$.

b) Reprezentați dreptele d_1 și d_2.

c) Calculați lungimea segmentului $[AB]$. Scrieți ecuația cercului de centru A și care trece prin B.

Varianta 3

Profilul uman

SUBIECTUL I

1. Să se rezolve ecuația $\log_2(9^{x-1}+7) = 2 + \log_2(3^{x-1}+1)$.

2. Se consideră ecuația $5x^4 + 9x^3 - 2x^2 - 4x - 8 = 0$.

a) Să se determine soluțiile raționale ale ecuației.

b) Să se rezolve ecuația în mulțimea numerelor complexe.

3. **a)** Să se determine funcția de gradul al doilea, știind că graficul funcției trece prin punctele $A(-1,6)$, $B(2,3)$, $C\left(-\frac{1}{2},3\right)$.

b) Considerând funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$, să se determine punctele de intersecție ale graficului funcției cu axele de coordonate.

SUBIECTUL II

1. Să se calculeze următoarele limite:

a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 8x + 12}$.

b) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{5^x + 3}{5^x - 3}$.

c) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{5^x + 3}{5^x - 3}$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\backslash\{1\}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{3x^2 - 6x + 5}{(x-1)^2}$.

a) Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x) = a + \dfrac{b}{(x-1)^2}$, pentru orice $x \neq 1$.

b) Să se stabilească intervalele de monotonie și să se precizeze numărul punctelor de extrem ale funcției f.

c) Să se stabilească intervalele de convexitate (concavitate) și numărul punctelor de inflexiune ale funcției f.

d) Să se stabilească semnul funcției f. Să se calculeze aria suprafeței plane limitate de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x = 2$, $x = 4$.

SUBIECTUL III

În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(1,2)$, $B(3,1)$, $C(2,-1)$.

a) Reprezentați punctele. Scrieți ecuația dreptei AB. Verificați prin calcul că punctele A, B, C sunt necoliniare.

b) Calculați distanțele AB, AC și BC. Demonstrați că triunghiul ABC este dreptunghic. Precizați coordonatele centrului și raza cercului circumscris triunghiului ABC.

Varianta 1

Profilurile industrial, agricol, silvic și sportiv-real

SUBIECTUL I

1. Se consideră ecuația $x^2 - (m+3)x + m^2 = 0$, m parametru real.

a) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât ecuația să admită rădăcini reale.

b) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât să fie adevărată relația

$$x_1(m^2 - 3x_1) + x_2(m^2 - 3x_2) = 0,$$

unde x_1 și x_2 reprezintă rădăcinile ecuației.

2. Să se rezolve ecuația $\log_{x+2}(x+5) = \log_{x+2} \dfrac{16}{x+5}$.

3. Se consideră sistemul (S) $\begin{cases} 2x - y + 5z + 7t = 0 \\ 4x - 2y + 7z + 5t = 0 \\ 2x - y + z - 5t = 0 \end{cases}$.

a) Sistemul admite soluțiile $x = -8$, $y = 8$, $z = -3$, $t = 1$, respectiv $x = 4$, $y = 8$, $z = 0$, $t = 0$?

b) Să se rezolve sistemul.

SUBIECTUL II

1. Se consideră funcția $f : (0,3) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\sqrt{9-x^2} - 3}{x}$. Să se calculeze următoarele limite:

a) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$.

b) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (1 + f(x))^{\frac{1}{x}}$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R}\backslash\{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2 + ax + b}{x - 1}$.

a) Să se determine a și b astfel încât funcția să admită un extrem egal cu 1 în punctul de abscisă 0.

b) Pentru $a = 1$ și $b = -1$ reprezentați graficul funcției obținute, folosind și derivata a doua.

c) Pentru $a = 1$ și $b = -1$ să se calculeze aria suprafeței plane limitate de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x = 2$, $x = 4$.

SUBIECTUL III

În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(0, \sqrt{3})$, $B(-1, 0)$ și $C(1, 0)$.

a) Să se reprezinte punctele. Să se verifice prin calcul că triunghiul ABC este echilateral.

b) Să se determine coordonatele lui D, simetricul punctului C față de dreapta AB.

c) Să se scrie ecuația cercului cu centrul în D și care trece prin punctele A și B.

Varianta 2

Profilurile industrial, agricol, silvic și sportiv-real

SUBIECTUL I

1. Să se rezolve ecuația $|x-3|^{10x^2-1} = |x-3|^{3x}$, $x \neq 3$.

2. Există x număr strict pozitiv astfel încât $\lg 2$, $\lg(2^x-1)$ și $\lg(2^x+3)$ să fie termeni succesivi ai unei progresii aritmetice? Justificați răspunsul.

3. Se consideră mulțimea $G = (3, \infty)$ și operația $x \star y = xy - 3x - 3y + 12$, $\forall\, x, y \in G$.

a) Să se arate că operația "$\star$" este lege de compoziție pe G.

b) Să se demonstreze că $(G, \star)$ formează o structură de grup comutativ.

SUBIECTUL II

1. Se consideră funcția $f : D \to \mathbb{R}$ (D domeniul maxim de definiție), $f(x) = \dfrac{ax^2+bx+c}{x+d}$.

a) Să se determine a, b, c, $d \in \mathbb{R}$, astfel încât graficul funcției să admită asimptotele $x = 3$ și $y = x + 2$, iar punctul $A(1,1)$ să se afle pe grafic.

b) Pentru $a = 1$, $b = -1$, $c = -2$, $d = -3$ să se reprezinte grafic funcția obținută, folosind și derivata a doua.

c) Pentru $a = 1$, $b = -1$, $c = -2$, $d = -3$ să se discute numărul rădăcinilor ecuației $f(x) = m$.

2. Se consideră funcțiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{e^x-1}{e^x+1}$, $g(x) = 2\ln(1+e^x) - x$.

a) Să se arate că funcția g este o primitivă a funcției f.

b) Să se stabilească semnul funcției f pe intervalul $[-1, 1]$.

c) Să se calculeze aria suprafeței plane limitate de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x = -1$ și $x = 1$.

SUBIECTUL III

În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră cercul de ecuație $x^2+y^2 = 25$. Să se scrie ecuațiile tangentelor la cerc care sunt paralele cu dreapta de ecuație $2x - y + 1 = 0$.

Varianta 3

Profilurile industrial, agricol, silvic și sportiv-real

SUBIECTUL I

1. Se consideră dezvoltarea $\left(9x - \dfrac{\sqrt{3}}{3\sqrt{x}}\right)^n$, $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$ și $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$.

- **a)** Să se determine n astfel încât coeficientul binomial al termenului al treilea să fie 105.
- **b)** Pentru $n = 15$, verificați dacă există un termen al dezvoltării care conține pe x^5. Justificați răspunsul.

2. Se consideră inegalitatea $\log_b(x^2 - x - 2) > \log_b(-x^2 + 2x + 3)$, $b > 0$, $b \neq 1$.

- **a)** Să se determine valorile lui x pentru care are sens inegalitatea.
- **b)** Știind că inecuația admite soluția $x = \dfrac{9}{4}$, să se determine b.
- **c)** Pentru $b \in (0, 1)$, să se rezolve inecuația.

3. Să se rezolve ecuația matriceală

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

precizând în prealabil tipul matricei X.

SUBIECTUL II

1. Să se calculeze $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln(1 + x - 3x^2 + 2x^3)}{\ln(1 + 3x - 4x^2 + x^3)}$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{2x} - 3x - 5(e^x - x + 3)$.

- **a)** Să se stabilească intervalele de monotonie și punctele de extrem ale funcției f.
- **b)** Să se stabilească punctele de inflexiune ale funcției f.

3. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \backslash \{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{kx^2 + \ell}{x - 1} + mx$, k, ℓ, m parametri reali. Să se determine k, ℓ, $m \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(2) = 23$, $f'(0) = 4$ și $\displaystyle\int_{-1}^{0} (x - 1) f(x)\, dx = \frac{37}{6}$.

SUBIECTUL III

În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră elipsa de ecuație $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ și punctul $C(0, 4)$.

- **a)** Să se reprezinte elipsa.
- **b)** Să se scrie ecuațiile tangentelor la elipsă care trec prin punctul C.

Varianta 1

Profilul pedagogic

SUBIECTUL I

1. Într-un depozit erau 185 t de cărbuni, iar în altul 237 t. Din primul depozit s-au luat 15 t de cărbuni pe zi, iar din al doilea câte 18 t de cărbuni. După câte zile a rămas în al doilea depozit de $1\frac{1}{2}$ ori mai mult cărbune decât în primul depozit?

2. Să se rezolve ecuația $\overline{23}_x \cdot \overline{32}_x = \overline{746}_x$, unde x reprezintă baza de numerație.

3. Într-o școală sunt cel mult 200 de elevi. Împărțind acești elevi, pe rând, în grupe de 6, 7, respectiv 8 elevi, rămâne mereu o grupă incompletă de 5 elevi. Câți elevi sunt în școală?

SUBIECTUL II

1. Să se rezolve ecuația $\log_{x+2}(x+5) = \log_{x+2} \dfrac{16}{x+5}$.

2. Se consideră polinoamele f, $g \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^5 - 7X^4 + 19X^3 + aX^2 - 110X + b$, $g = X^3 - 3X^2 - 6X + c$, a, b, $c \in \mathbb{R}$.

a) Determinați $c \in \mathbb{R}$ astfel încât rădăcinile polinomului g să fie în progresie aritmetică.

b) Pentru $c = 8$ determinați a și b astfel încât polinomul f să se dividă cu polinomul g.

3. Să se rezolve ecuația matriceală

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

precizând în prealabil tipul matricei X.

SUBIECTUL III

1. Se consideră triunghiul ABC, A_1 și B_1 mijloacele segmentelor $[BC]$, respectiv $[AC]$, iar G centrul de greutate al triunghiului. Dacă CA_1GB_1 este patrulater inscriptibil, să se demonstreze că:

a) $\triangle AGB_1 \sim \triangle ACA_1$.

b) $3AC^2 = 4AA_1^2$.

2. Se consideră O, A, B, C patru puncte necoplanare astfel încât triunghiurile OAB, OBC și OCA să fie dreptunghice în O și isoscele. Se fac următoarele notații: K ortocentrul triunghiului ABC; R proiecția lui K pe planul (OBC).

Să se demonstreze că punctul R este centrul de greutate al triunghiului OBC.

Varianta 2

Profilul pedagogic

SUBIECTUL I

1. Prin 10 robinete curg 24000 l de apă în 4 ore. Dacă debitul este același, în câte ore vor curge 21600 l apă prin 12 robinete?

2. În cebază de numerație, numerele 23, 32, respectiv 41 sunt pitagoreice?

3. Într-o tabără sunt mai puțini de 500 de elevi. Dacă s-ar grupa câte 2, câte 3, câte 4 sau câte 5, atunci, de fiecare dată, ar rămâne câte un singur elev. Dacă s-ar grupa câte 7, nu ar mai rămâne niciun elev singur. Câți elevi sunt în tabără?

SUBIECTUL II

1. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât inegalitatea $\dfrac{2x^2+2x+3}{x^2+x+1} \leq a$ să fie adevărată pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

2. Să se determine suma primilor 9 termeni ai unei progresii geometrice cu termeni pozitivi, pentru care termenii al treilea și al cincilea sunt cea mai mică, respectiv cea mai mare rădăcină a ecuației

$$\frac{1}{2}\left[1+\log_4(3x-2)\right] = \log_4\left(1+\sqrt{10x-11}\right).$$

3. Pentru $x,\ y \in (-2,2)$ se definește $x \star y = \dfrac{4(x+y)}{xy+4}$. Să se demonstreze că "$\star$" este lege de compoziție pe $G=(-2,2)$ și că $(G,\star)$ este grup abelian.

SUBIECTUL III

1. Se consideră triunghiul ABC cu $m(\sphericalangle A) = 90^\circ$, $AB = AC+6$ și $BC = 30$; CD este bisectoarea unghiului $\sphericalangle ACB$ și $D \in (AB)$. Să se determine lungimea segmentului $[CD]$.

2. Se consideră tetraedrul $ABCD$ cu proprietatea $AB = AC = AD = BC = BD = a$ și $CD = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $a > 0$; E mijlocul segmentului $[AB]$.

a) Să se demonstreze că $AB \perp (CDE)$.

b) Dacă $CM \perp DE$, $M \in [DE]$, să se arate că $CM \perp (ABD)$. Să se calculeze volumul tetraedrului.

Varianta 3

Profilul pedagogic

SUBIECTUL I

1. Trei robinete pot umple un bazin astfel:

- primul robinet împreună cu al doilea în două ore și 24 minute;
- primul robinet împreună cu al treilea în trei ore;
- al doilea robinet împreună cu al doilea în patru ore.

În cât timp ar putea umple bazinul fiecare robinet în parte?

2. Să se găsească numerele naturale cuprinse strict între 900 și 1000, astfel încât să se împartă fără rest la 5 și suma cifrelor să fie 16.

3. Ana are azi de 5 ori vârsta pe care o avea ea, când fratele ei avea vârsta ei actuală; când ea va avea vârsta de azi a fratelui ei, suma vârstelor va fi 88 de ani. Ce vârstă are azi fiecare din cei doi frați?

SUBIECTUL II

1. Se consideră ecuațiile:

$$ax^2 + bx + c = 0, \tag{3}$$

$$2a^2x^2 + 2abx + b^2 - 2ac = 0,\ a, b, c, \in \mathbb{R} \text{ și } a \neq 0. \tag{4}$$

a) Să se arate că este adevărată următoarea echivalență:
ecuația (3) are rădăcini reale și distincte dacă și numai dacă ecuația (4) are rădăcini complexe.

b) Să se rezolve în $\mathbb{C}$ ecuațiile: $t^2 - 5t + 4 = 0$ și $2z^2 - 10z + 17 = 0$.

2. Să se rezolve ecuația $\log_3(9^x + 9) = x - \log_{\frac{1}{3}}(28 - 2 \cdot 3^x)$.

3. Să se discute după valorile parametrului real a și să se rezolve sistemul

$$(S) \quad \begin{cases} x - ay + z = 2a \\ x - 2y + z = -2 \\ ax + a^2y - 2z = 2 \end{cases} .$$

SUBIECTUL III

1. Se consideră patrulaterul $MNPQ$ înscris într-un cerc; diagonalele patrulaterului sunt perpendiculare și se întâlnesc în punctul F. Să se demonstreze că $FR \perp MQ$, unde R este mijlocul segmentului $[NP]$.

2. Baza unei prisme este un triunghi echilateral de latură a. Muchiile laterale formează cu planul bazei un unghi de măsură $60°$. Unul din vârfurile bazei se proiectează pe cealaltă bază în centrul cercului circumscris acesteia. Să se calculeze înălțimea prismei și aria sa totală.

Varianta 1

Profilurile economic, fizică-chimie și chimie-biologie

SUBIECTUL I

1. Să se rezolve ecuația $\log_x \sqrt{5} + \log_x(5x) = \dfrac{9}{4} + \left(\log_x \sqrt{5}\right)^2$.

2. Se consideră polinoamele f, $g \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^5 - 7X^4 + 19X^3 + aX^2 - 110X + b$, $g = X^3 - 3X^2 - 6X + c$, a, b, $c \in \mathbb{R}$.

a) Determinați $c \in \mathbb{R}$ astfel încât rădăcinile polinomului g să fie în progresie aritmetică.

b) Pentru $c = 8$ determinați a și b astfel încât polinomul f să se dividă cu polinomul g.

3. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 5 & 6 \\ 8 & 12 & 7 & m \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, m parametru real.

a) Să se determine rangul matricei A.

b) Pentru $m = 8$ să se rezolve sistemul $\begin{cases} 6x + 9y + 5z + 6t = 7 \\ 8x + 12y + 7z + mt = 9 \\ 2x + 3y + z + 2t = 3 \\ 4x + 6y + 3z + 4t = 5 \end{cases}$.

SUBIECTUL II

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R}\backslash\{-1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2 - m}{x+1}e^x$, m parametru real.

a) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât funcția f să aibă trei puncte de extrem.

b) Pentru $m = 2$ să se stabilească monotonia și punctele de extrem ale funcției obținute.

2. a) Să se demonstreze că dacă funcția $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$, $a > 0$, este continuă și impară, atunci $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.

b) Să se arate că $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \ln\frac{1+x}{1-x}\,dx = 0$ și $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} x^2 \sin x\,dx = 0$.

c) Care este aria suprafeței plane limitate de graficul funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 \sin x$, axa Ox și dreptele de ecuații $x = -\dfrac{\pi}{4}$ și $x = \dfrac{\pi}{4}$?

SUBIECTUL III

În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră cercul $\mathscr{C} : x^2 + y^2 + 4x - 6y - 17 = 0$ și dreapta $d : 5x + 2y - 13 = 0$.

a) Să se determine coordonatele centrului și raza cercului $\mathscr{C}$.

b) Să se scrie ecuația dreptei d_1 care trece prin centrul cercului $\mathscr{C}$ și este perpendiculară pe d. Să se afle coordonatele punctului de intersecție al dreptelor d și d_1.

Varianta 2

Profilurile economic, fizică-chimie și chimie-biologie

SUBIECTUL I

1. Să se rezolve ecuația $3\log_x 4 + 2\log_{4x} 4 + \log_{16x} 4 = 0$.

2. Se consideră dezvoltarea $\left(\sqrt{y} + \dfrac{1}{2\sqrt[4]{y}}\right)^n$, $y \in \mathbb{R}$, $y > 0$ și $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se determine n pentru care coeficienții termenilor 1, 2, respectiv 3 ai dezvoltării, formează o progresie aritmetică.

b) Pentru $n = 8$, verificați dacă există termeni ai dezvoltării astfel încât puterea lui y să fie număr natural.

3. Se consideră submulțimea numerelor reale $G = (2, \infty) - \{3\}$ pe care se definește operația

$$x \star y = (x-2)^{\frac{1}{3}\ln(y-2)} + 2.$$

a) Să se demonstreze că operația "$\star$" este lege de compoziție pe G.

b) Să se arate că $(G, \star)$ este grup comutativ.

SUBIECTUL II

1. Se consideră funcția $f : D \to \mathbb{R}$ (D domeniul maxim de definiție), $f(x) = x - \sqrt{ax^2 + bx + 1}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$.

a) Să se determine a și b astfel încât $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\dfrac{1}{2}$.

b) Pentru $a = b = 1$ să se determine asimptotele la graficul funcției obținute.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 5^{1+x} + 5^{1-x} + 25^x + 25^{-x}$.

a) Să se stabilească monotonia și punctele de extrem ale funcției f.

b) Să se discute după valorile parametrului real m numărul de soluții reale ale ecuației $f(x) = m$.

SUBIECTUL III

În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(0, 4)$, $B(-2, 0)$ și $C(3, 0)$.

a) Să se reprezinte punctele și să se calculeze distanțele BC și AC.

b) Să se scrie ecuațiile mediatoarelor segmentelor $[AB]$ și $[BC]$.

c) Să se determine centrul și raza cercului circumscris triunghiului ABC.

Varianta 3

Profilurile economic, fizică-chimie și chimie-biologie

SUBIECTUL I

1. Să se rezolve inecuația $\log_{x+\frac{1}{x}}\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}-4\right)\geq 1$.

2. Precizați dacă există un număr complex z care să îndeplinească simultan condițiile:

$$|z-1-2i|=3 \text{ și } \operatorname{Re} z\geq 5.$$

3. Se consideră sistemul (S) $\begin{cases} 2x+\ \ y+\ z=\ 1\\ \ x-\ \ y-\ z=\ m\\ 3x+\ \ y+2z=-1\\ \ x+my+\ z=\ m\end{cases}$, m parametru real. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât sistemul să fie compatibil și, în acest caz, să se rezolve.

SUBIECTUL II

1. Să se calculeze următoarele limite:

a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-4}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}}$.

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{2^x-3^x}{x\sqrt{1-x^2}}$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\backslash\{2\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x+2}e^{|x|}$.

a) Să se stabilească domeniul de derivabilitate al funcției și să se calculeze derivata funcției f.

b) Să se reprezinte grafic funcția f, folosind și derivata a doua.

c) Să se calculeze următoarea integrală:

$$I=\int_{-1}^{1}f(x)\cdot(x+2)\cdot x^2\,dx.$$

SUBIECTUL III

În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră dreapta $d:\ x+5=0$ și elipsa $\mathscr{E}:\ \dfrac{x^2}{20}+\dfrac{y^2}{4}=1$.

a) Reprezentați grafic elipsa și dreapta.

b) Fie B și C vârfurile situate pe semiaxa pozitivă Oy, respectiv semiaxa Ox negativă. Determinați coordonatele unui punct situat pe dreapta d, aflat la egală distanță de punctele B și C.

Varianta 1

Profilurile matematică-fizică, informatică și metrologie

SUBIECTUL I

1. Se consideră expresia $P(x) = x^2 - x\log_a t + 3\log_a t - 8$, unde $a, t \in \mathbb{R}$, $0 < a < 1$ și $t > 0$.

a) Să se determine t, astfel încât $P(x) > 0$, pentru orice x real.

b) Să se determine t, astfel încât ecuația $P(x) = 0$ să admită o rădăcină dublă situată în intervalul $(0, 3)$.

2. Să se rezolve ecuația $x^2 \cdot 2^{x+1} + 2^{|x-3|+2} = x^2 \cdot 2^{|x-3|+4} + 2^{x-1}$.

3. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 5 & 6 \\ 8 & 12 & 7 & m \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, m parametru real.

a) Să se calculeze determinantul matricei A.

b) Pentru $m = 8$ să se rezolve ecuația matriceală $A \cdot X = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, unde $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$.

SUBIECTUL II

1. Să se arate că pentru orice număr real $x \geq 0$ este adevărată relația:

$$1 - \frac{x}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{x+1}} \leq 1.$$

2. Se consideră funcția $f : D \to \mathbb{R}$ (D domeniul maxim de definiție), $f(x) = \arctan\frac{a+x}{1-ax} - \frac{1}{a}\ln\sqrt{1+x^2}$, $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

a) Să se determine a astfel încât $\lim\limits_{x\to\infty}(-axf'(x))^x = e^2$.

b) Pentru $a = -2$ să se determine domeniul de definiție și domeniul de derivabilitate ale funcției obținute. Să se stabilească intervalele de monotonie ale funcției obținute.

3. Se consideră funcția $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}\cdot$

a) Să se rezolve inecuația $f(x) \geq 1$.

b) Calculați aria suprafeței plane limitate de graficul funcției f, dreptele $y = 1$, $x = \frac{1}{e^2}$ și $x = \frac{1}{e}$.

SUBIECTUL III

În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(3, 1)$, $B(-1, 3)$ și dreapta $d:\ 3x - y - 2 = 0$. Să se determine ecuația cercului care are centrul pe dreapta d și trece prin punctele A și B.

Varianta 2

Profilurile matematică-fizică, informatică și metrologie

SUBIECTUL I

1. Se consideră dezvoltarea $\left(\dfrac{\sqrt{2^x}}{\sqrt[16]{8}}+\dfrac{\sqrt[16]{32}}{\sqrt{2^x}}\right)^n$, $n\in\mathbb{N}^*$, $x\in\mathbb{R}$.

a) Determinați n astfel încât C_n^0, $\dfrac{C_n^1}{2}$, $\dfrac{C_n^2}{4}$ să fie termeni succesivi ai unei progresii aritmetice.

b) Pentru $n=8$, verificați dacă există valori ale lui x astfel încât diferența dintre termenii al șaselea și al patrulea ai dezvoltării să fie 56.

2. Se consideră polinomul $f\in\mathbb{R}[X]$, $f=X^4+2X^3+aX^2+bX+c$, a, b, c parametri.

a) Să se determine în funcție de coeficienți suma pătratelor rădăcinilor polinomului f.

b) Pentru $a=3$, să se arate că pentru orice b, $c\in\mathbb{R}$ polinomul f nu poate avea toate rădăcinile reale.

c) Să se determine a, b, $c\in\mathbb{Q}$, știind că restul împărțirii lui f la $X-1$ este egal cu 3 și f are rădăcina $-1+\sqrt{2}$. Pentru a, b, c determinați, rezolvați în mulțimea numerelor complexe ecuația $f(x)=0$.

3. **a)** Să se definească inelul fără divizori ai lui zero și să se dea un exemplu de inel fără divizori ai lui zero.

b) Admitem că mulțimea $A=\{f\mid f:\{0;1\}\to\mathbb{R}\}$ înzestrată cu operația de adunare și de înmulțire a funcțiilor, formează o structură de inel. Inelul $(A,+\cdot)$ are divizori ai lui zero? Justificați răspunsul.

SUBIECTUL II

1. Se consideră funcția $f:D\to\mathbb{R}$ (D domeniul maxim de definiție), $f(x)=ax+\sqrt{bx^2+cx+1}$, a, b, c parametri reali, a, $b>0$.

a) Să se determine a, b și c astfel încât graficul funcției să admită spre $+\infty$ asimptotă paralelă cu dreapta $y=4x-2$, iar spre $-\infty$ asimptota orizontală $y=-1$.

b) Pentru $a=2$, $b=4$ și $c=4$ să se reprezinte grafic funcția obținută.

2. **a)** Să se demonstreze că dacă funcția $f:[-a,a]\to\mathbb{R}$, $a>0$, este continuă și impară, atunci $\displaystyle\int_{-a}^{a}f(x)\,dx=0$.

b) Să se arate că $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\ln\frac{1+x}{1-x}\,dx=0$ și $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}x^2\sin x\,dx=0$.

c) Care este aria suprafeței plane limitate de graficul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2\sin x$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=-\dfrac{\pi}{4}$ și $x=\dfrac{\pi}{4}$?

SUBIECTUL III

În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(0,4)$, $B(-2,0)$ și $C(3,0)$.

a) Reprezentați punctele și calculați distanțele BC și AC.

b) Să se scrie ecuațiile mediatoarelor segmentelor $[AB]$ și $[BC]$.

c) Determinați centrul și raza cercului circumscris triunghiului ABC.

Varianta 3

Profilurile matematică-fizică, informatică și metrologie

SUBIECTUL I

1. Să se rezolve inecuația $\log_{2x-x^2}\left(x-\frac{3}{2}\right) > 0$.

2. Precizați dacă există un număr complex z care să îndeplinească simultan condițiile:

$$|z-1-2i| = 3 \text{ și } \operatorname{Re} z \geq 5.$$

3. **a)** Calculați determinantul $\Delta = \begin{vmatrix} x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, scriind rezultatul ca produs de factori.

b) Să se demonstreze că dacă polinomul $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = aX^2 + bX + c$ (a, b, c parametri), are trei rădăcini distincte, atunci $a = b = c = 1$.

c) Să se determine valorile parametrului m pentru care ecuația

$$(m^2-3m+2)x^2 - (m^2-5m+4)x + m - m^2 = 0$$

are cel puțin trei rădăcini distincte.

SUBIECTUL II

1. Se consideră progresia geometrică $(b_n)_{n\geq 1}$ cu $b_1 > 0$, cu rația $q \in (0,1)$ și sumele $S_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ și $T_n = b_1^3 + b_2^3 + \cdots + b_n^3$.

a) Să se calculeze S_n și T_n în funcție de b_1 și q.

b) Știind că $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 3$ și $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = \frac{108}{13}$, să se afle primul termen b_1 și rația q.

2. Se consideră expresia definită prin $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + (m-2)x - m + 2}$, m parametru real.

a) Să se determine mulțimea valorilor lui m pentru care domeniul de definiție al funcției coincide cu domeniul de derivabilitate.

b) Pentru $m = -2$ să se stabilească monotonia și punctele de extrem ale funcției obținute.

3. Precizați dacă există numerele reale a și b astfel încât funcția $F(x) = \left(\frac{a}{x} + b\right) \cdot e^{\frac{2}{x}}$ să fie primitiva funcției $f(x) = \frac{1}{x^3} e^{\frac{2}{x}}$ pe $(0, \infty)$. Justificați răspunsul.

SUBIECTUL III

În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră dreapta $d:\ x + 5 = 0$ și elipsa $\mathscr{E}:\ \frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{4} = 1$.

a) Reprezentați grafic elipsa și dreapta.

b) Fie B și C vârfurile situate pe semiaxa pozitivă Oy, respectiv semiaxa Ox negativă. Determinați coordonatele unui punct situat pe dreapta d, aflat la egală distanță de punctele B și C.