BACALAUREAT 2000
SIMULARE - MARTIE
Varianta 1

Profilul matematică - fizică, informatică, metrologie

SUBIECTUL I

Se dau funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 8x^2 - 8$ şi $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = \ln x$.

1. Să se calculeze $(f + g)\left(\dfrac{3}{4}\right)$ şi $(f + g)(1)$.

2. Să se arate că $f + g$ este strict crescătoare pe $(0, \infty)$.

3. Să se deducă din 1. şi 2. că ecuaţia $(f + g)(x) = 0$ are o singură rădăcină în intervalul $\left(\dfrac{3}{4}, 1\right)$.

4. Se notează cu x_1, x_2, $x_3 \in \mathbb{C}$ rădăcinile ecuaţiei $f(x) = 0$ şi cu $S_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

a) Să se calculeze S_1, S_2 şi S_3.
b) Să se arate că $S_n \in \mathbb{Z}$, $(\forall)\ n \geq 1$.

SUBIECTUL II

Se consideră mulţimea $G = \left\{ A(x) \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid A(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3^x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\}$.

1. Să se arate că $A(x) \cdot A(y) = A(x + y)$, $(\forall)\ x, y \in \mathbb{R}$.

2. Folosind eventual rezultatul de la 1., să se arate că:

a) $A(x) \cdot A(y) = A(y) \cdot A(x)$, $(\forall)\ x, y \in \mathbb{R}$.
b) $A(x) \cdot A(0) = A(x)$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.
c) $A(x) \cdot A(-x) = A(0)$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.
d) Să se arate că $(G, \cdot)$ este grup comutativ.

3. Să se calculeze $A^n(2)$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$.

SUBIECTUL III

Se dă funcţia $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[4]{2 - \lg x}$, unde D este domeniul maxim de definiţie al funcţiei.

1. Să se determine D.

2. Să se determine $x \in D$ astfel încât termenul al cincilea din dezvoltarea binomului $(1 + x^{f(x)})^6$ să fie 15.

3. **a)** Să se calculeze $f'(x)$ pentru $x \in (0, 100)$.
b) Să se scrie ecuaţia tangentei la graficul funcţiei în punctul $A(10, f(10))$.

SUBIECTUL IV

Se defineşte şirul $(I_n)_{n \geq 0}$ prin: $I_0 = \displaystyle\int_0^1 e^x\, dx$ şi $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n e^x\, dx$, $(\forall)\ n \geq 1$.

1. Să se calculeze I_0 şi I_1.

2. Utilizând integrarea prin părţi, să se demonstreze că $I_{n+1} = e - (n + 1)I_n$, $(\forall)\ n \geq 0$.

3. Să se arate că şirul $(I_n)_{n \geq 0}$ este:

a) descrescător;
b) convergent.

4. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{n \to \infty} I_n$;
b) $\lim\limits_{n \to \infty} nI_n$.

Varianta 2

Profilul matematică - fizică, informatică, metrologie

SUBIECTUL I

Se consideră sistemul $\begin{cases} -ax + y + z = -1 \\ x - ay + z = a \\ x + y - z = 2 \end{cases}$, unde a este parametru real.

1. Să se determine valorile lui a pentru care sistemul are soluţie unică.

2. Să se rezolve sistemul pentru $a = -1$.

3. Să se arate că pentru $a = 3$ sistemul nu are soluţii.

SUBIECTUL II

Fie $P(X) = X^2 - 4X + 3$. Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$, se defineşte şirul $(a_n)_{n\geq 4}$ prin $a_n = \dfrac{1}{P(4)} + \dfrac{1}{P(5)} + \dfrac{1}{P(6)} + \ldots + \dfrac{1}{P(n)}$.

1. Să se demonstreze că şirul $(a_n)_{n\geq 4}$ este crescător.

2. Să se arate că $a_n = \dfrac{(n-3)(3n-4)}{4(n-1)(n-2)}$, $(\forall)$ $n \geq 4$.

3. Să se deducă $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

SUBIECTUL III

Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$ se consideră funcţia $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = (x^2 - 4x + 3)^{2n+1}$.

1. Să se arate că $f_n(x) \geq f_n(2)$, $(\forall)$ $x \in \mathbb{R}$, $(\forall)$ $n \in \mathbb{N}$.

2. Dreapta $y = a$ cu $a > -1$ intersectează graficul funcţiei în punctele A şi B. Să se calculeze coordonatele mijlocului segmentului $[AB]$.

3. **a)** Să se determine numărul rădăcinilor reale ale ecuaţiei $f_2(x) = 0$.

b) Să se afle care dintre rădăcini sunt puncte de extrem ale funcţiei f_2.

4. Să se calculeze $\displaystyle\int \frac{dx}{f_0(x)}$, $x \in (1, 3)$.

SUBIECTUL IV

Se dă polinomul $S(X) = (X^2 - 4X + 3)^7$.

1. **a)** Să se afle toate rădăcinile x_i, $1 \leq i \leq 14$ ale polinomului dat.

b) Să se calculeze $\displaystyle\sum_{i=1}^{14} x_i$ şi $\displaystyle\sum_{i=1}^{14} \frac{1}{x_i}$.

2. Forma algebrică a polinomului dat este $S(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{14} a_k X_k$. Folosind eventual relaţiile dintre rădăcini şi coeficienţi, să se deducă valorile coeficienţilor a_{13} şi a_1.

3. Să se demonstreze că există p, $q \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $S(\sqrt{2}) = p - q\sqrt{2}$.

SIMULARE - MARTIE
Varianta 1

Profilul economic, fizică-chimie, chimie-biologie

SUBIECTUL I

Fie $a,\, b \in (0, \infty)$ şi funcţia $f : \mathbb{R} \backslash \{1\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{ax^2 + b}{x - 1}$.

1. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - ax]$.

c) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)$ şi $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)$.

2. **a)** Să se calculeze $f'(x),\ x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$.

b) Să se arate că funcţia f' are pe $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ două rădăcini distincte.

c) Să se determine punctul de maxim al funcţiei f.

SUBIECTUL II

Fie şirurile $(a_n)_{n\geq 1}$ şi $(b_n)_{n\geq 1}$ definite astfel: $a_n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ şi $b_n = \ln a_n,\ n \geq 1$.

1. Să se arate că $(\exists)\ q \in \mathbb{R}$ astfel încât $a_{n+1} = qa_n,\ (\forall)\ n \geq 1$.

2. **a)** Să se calculeze $b_{n+1} - b_n,\ n \geq 1$.

b) Să se precizeze care dintre cele două şiruri este progresie aritmetică.

3. Să se calculeze:

a) $a_1 + a_2 + \ldots + a_n,\ n \in \mathbb{N}^*$.

b) $b_1 + b_2 + \ldots + b_n,\ n \in \mathbb{N}^*$.

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$.

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{2} - \sum\limits_{k=1}^{n} a_k\right) \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$.

SUBIECTUL III

Pentru $x \in \mathbb{R}$ se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} x-2 & 1 \\ 1 & x-2 \end{pmatrix}$.

1. Să se determine valorile lui x pentru care $\det A = 0$.

2. **a)** Să se calculeze A^2.

b) Să se demonstreze că $A^2 = (2x - 4)A - \det A \cdot I_2$.

3. Să se arate că $A^2 = (2x - 4)A$ dacă şi numai dacă $x \in \{1; 3\}$.

4. Dacă $x = 3$, să se demonstreze că $A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix},\ (\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$.

SUBIECTUL IV

Se dă funcţia $f : [0, 3] \to \mathbb{R},\ f(x) = (x\sqrt{2} - \sqrt{3})^{10}$.

1. Să se calculeze $\displaystyle\int f(x)\, dx,\ x \in [0, 3]$.

2. Fie $F : [0, 3] \to \mathbb{R}$ o primitivă a lui f.

a) Să se studieze monotonia funcţiei F.

b) Să se determine punctele de extrem ale funcţiei F.

3. Să se rezolve ecuaţia $F''(x) < 0$, $x \in [0, 3]$.

4. Să se demonstreze că tangentele la graficul funcţiei F în punctele $A(0, F(0))$ şi $B(\sqrt{6}, F(\sqrt{6}))$ sunt paralele.

Varianta 2

SUBIECTUL I

Se consideră polinomul $P(X) = X^2(X-2)^2 + a$, $a \in \mathbb{R}$.

1. Să se calculeze $P(1-i)$.

2. Să se arate că $P(1-i) = P(1+i)$.

3. Să se formeze o ecuaţie de gradul al doilea cu coeficienţi reali care admite ca rădăcini numerele $1+i$ şi $1-i$.

4. Dacă $P(X)$ are rădăcina $1+i$, să se rezolve ecuaţia $P(x) = 0$.

SUBIECTUL II

Se consideră $f, g : \mathbb{N}\setminus\{0,1,2\} \to \mathbb{R}$ definite prin $f(n) = \begin{vmatrix} C_n^0 & C_n^1 \\ C_n^2 & C_n^3 \end{vmatrix}$, $g(n) = \begin{vmatrix} A_n^0 & A_n^1 \\ A_n^2 & A_n^3 \end{vmatrix}$, $n \geq 3$.

1. Să se arate că $f(n) = \dfrac{n - n^3}{3}$ şi $g(n) = 2n - 2n^2$, $n \geq 3$.

2. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(n)}{g(n)}$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(n^2)}{g(n^3)}$.

3. **a)** Să se arate că există $A, B \in \mathbb{R}$ astfel încât $\dfrac{1}{f(k)} = \dfrac{A}{(k-1)k} + \dfrac{B}{k(k+1)}$, $(\forall)\ k \in \mathbb{N}$, $k \geq 3$.

b) Să se calculeze $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{f(k)}$, pentru $n \geq 3$ şi $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{f(k)}$.

SUBIECTUL III

Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie "$\star$" prin $x \star y = xy - (x+y)\sqrt{2} + 2 + \sqrt{2}$, $x, y \in \mathbb{R}$.

1. **a)** Să se arate că legea "$\star$" este comutativă.

b) Să se arate că intervalul $[\sqrt{2}, \infty)$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea "$\star$".

2. **a)** Să se determine $y \in [\sqrt{2}, \infty)$ astfel încât $x \star y = x$, $(\forall)\ x \in [\sqrt{2}, \infty)$.

b) Să se deducă existenţa elementului neutru al legii "$\star$" pe $[\sqrt{2}, \infty)$.

c) Pentru $a \in (\sqrt{2}, \infty)$ fixat, să se determine $y \in (\sqrt{2}, \infty)$ care verifică relaţia $a \star y = 1 + \sqrt{2}$.

SUBIECTUL IV

Se consideră funcţia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - 1 - \cos x$.

1. **a)** Să se calculeze $f(0)$ şi $f(1)$.

b) Să se demonstreze că f are cel puţin o rădăcină în intervalul $(0,1)$.

2. **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x \in [0,1]$.

b) Să se demonstreze că f' are semn constant pe $[0,1]$.

c) Să se demonstreze că f are o singură rădăcină în intervalul $(0,1)$.

3. Să se calculeze:

a) $\displaystyle\int f(x)\, dx$, $x \in [0,1]$.

b) $\displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx$

SIMULARE - MARTIE
Varianta 1

Profilul industrial silvic, agricol, sportiv-real

SUBIECTUL I

Pentru $a,\, b \in \mathbb{R}$ se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} a-1 & b^2+1 \\ -1 & a \end{pmatrix}$.

1. **a)** Să se calculeze $\det A$.
b) Să se arate că $\det A \geq 0$, $(\forall)\ a,\, b \in \mathbb{R}$.
c) Să se arate că $\det A = 0 \Leftrightarrow a = 1$ şi $b = 0$.

2. Pentru $a = b = 1$ să se calculeze:

a) A^2 şi A^4.
b) A^{-1} folosind eventual 2. a).
c) A^{2000}.

3. Să se determine $a,\, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $A^2 = -4I_2$.

SUBIECTUL II

Fie $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln \dfrac{x}{x+1}$, unde D este domeniul maxim de definiţie al funcţiei.

1. **a)** Să se determine D.
b) Să se determine $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ şi $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

2. **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x \in D$.
b) Să se determine intervalele de monotonie ale funcţiei f.
c) Să se arate că există $A,\, B \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$f'(x) = \frac{A}{x} - \frac{B}{x+1},\ x \in D.$$

d) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} (f'(1) + f'(2) + \ldots + f'(n))$.

3. Să se scrie ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul $A(1, f(1))$.

SUBIECTUL III

Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea "$\star$" prin $x \star y = x + ay + 3$, $a \in \mathbb{R}$.

1. Să se arate că "$\star$" este comutativă $\Leftrightarrow a = 1$.

2. Fie $I = [-3, \infty)$ şi $a = 1$. Să se arate că:

a) I este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea "$\star$".
b) "$\star$" are element neutru pe 1.
c) I conţine un singur element simetrizabil în raport cu legea "$\star$".

3. Pentru $a = 1$ să se rezolve ecuaţia $x \star x \star x \star x \star x \star x = 37$.

SUBIECTUL IV

Se dă funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (2x-3)^5$.

1. Să se calculeze $\displaystyle\int f(x)\, dx$.

2. Fie $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o primitivă a funcţiei f. Să se calculeze $F''(x)$.

3. Ştiind că $f(x) = a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, să se calculeze a_3 şi $\dfrac{a_4}{a_5}$.

Varianta 2

SUBIECTUL I

Pentru $m \in \mathbb{R}$ se consideră sistemul $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x - y = 1 \\ 3x + my = 5 \end{cases}$.

1. Să se rezolve sistemul pentru $m = 2$.

2. Să se arate că pentru $m \neq 2$ sistemul nu are soluţii.

3. Într-un sistem cartezian de coordonate xOy se consideră dreptele $d_1 : x + 2y - 3 = 0$, $d_2 : 2x - y - 1 = 0$ şi $d_m : 3x + my - 5 = 0$, $m \in \mathbb{R}$.

- **a)** Să se deducă din 1. că dreptele d_1 şi d_2 se intersectează în $A(1, 1)$.
- **b)** Să se deducă din 1. şi 2. că $A \in d_m$ dacă şi numai dacă $m = 2$.

SUBIECTUL II

Fie $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2} - x$, unde D este domeniul maxim de definiţie.

1. Să se determine D.

2. Să se determine coordonatele punctului de intersecţie al graficului funcţiei f cu axa Ox.

3. Să se calculeze:

- **a)** $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.
- **b)** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

SUBIECTUL III

Se consideră mulţimea $G = \left\{ A(x) \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; A(x) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \; x \in \mathbb{R} \right\}$.

1. Să se arate că $A(x)A(y) = A(x + y)$, $(\forall)\ x, y \in \mathbb{R}$.

2. Să se arate că:

- **a)** $A(x)A(y) = A(y)A(x)$, $(\forall)\ x, y \in \mathbb{R}$.
- **b)** $A(x)A(0) = A(x)$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.
- **c)** $A(x)A(-x) = A(0)$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.
- **d)** $(G, \cdot)$ este grup comutativ.

3. Să se calculeze $A^n(3)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

SUBIECTUL IV

Fie $f : (1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2 + ax + b}{x - 1}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

1. Să se determine $f'(x)$, $x \in (1, \infty)$.

2. Să se determine a şi b astfel încât $f(2) = 1$ şi $f'(2) = 0$.

3. Dacă $a = -3$ şi $b = 3$, se cere:

- **a)** Să se stabilească semnul lui f' pe $(1, \infty)$.
- **b)** Să se determine intervalele de monotonie ale lui f.

4. Să se calculeze $\displaystyle\int \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}\, dx$, $x \in (1, \infty)$ şi $\displaystyle\int_2^3 \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}\, dx$.

SIMULARE - MARTIE
Varianta 1

Profilul pedagogic

SUBIECTUL I

1. Să se demonstreze că suma $S = \overline{ab4} + \overline{aba} + \overline{a1b}$ este divizibilă cu 7 (termenii sumei sunt numere naturale în baza 10).

2. Suma a trei numere naturale este 37. Dacă se măreşte primul cu 150% din el, al doilea se micşorează cu 25% din el, iar al treilea se micşorează cu 5, atunci numerele obţinute sunt egale. Să se afle numerele.

SUBIECTUL II

1. Determinaţi elementele mulţimii $A = \left\{ x \in \mathbb{Z} \;\middle|\; \dfrac{6x+9}{3x+2} \in \mathbb{Z} \right\}$

2. Să se determine rădăcinile polinomului $P(X) = 2X^3 - 7X^2 - 5X + 4$, ştiind că $P(X)$ este divizibil cu $X + 1$.

3. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $9^{x^2-1} - 4 \cdot 3^{x^2-1} + 3 = 0.$

b) $\log_3 \dfrac{x+5}{x+3} + 2\log_9(x+1) = 1.$

SUBIECTUL III

1. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & x & 3 \\ x & -1 & x \\ 1 & 2 & m \end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze $\det A$.

b) Să se determine valorile parametrului real m astfel încât matricea A să fie inversabilă pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

2. Pe mulţimea $\mathbb{R}$ definim legea de compoziţie $x \star y = xy + 3x + 3y + 6$.

a) Să se arate că $(\mathbb{R}, \star)$ este monoid comutativ.

b) Să se găsească elementele inversabile ale monoidului.

SUBIECTUL IV

1. Fie un triunghi ABC, dreptunghic în A, iar D mijlocul segmentului $[BC]$. Punctul E este simetricul lui B faţă de dreapta AD. Să se arate că:

a) $EC \parallel AD$.

b) Punctele A, B, C, E sunt vârfurile unui patrulater inscriptibil.

2. Se consideră tetraedrul $SABC$ ale cărui muchii $[SA]$, $[SB]$, $[SC]$ sunt două câte două perpendiculare şi $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Se cere:

a) Să se calculeze lungimile muchiilor $[SA]$, $[SB]$, $[SC]$.

b) Să se calculeze volumul tetraedrului $SABC$.

c) Să se arate că proiecţia H a lui S pe planul (ABC) coincide cu punctul de concurenţă al înălţimilor triunghiului ABC.

d) Să se arate că aria triunghiului SBC este medie proporţională între ariile triunghiurilor HBC şi ABC.

Varianta 2

SUBIECTUL I

1. Într-o clasă sunt băieţi şi fete. Numărul băieţilor este cu 3 mai mare decât numărul fetelor. Dacă ar mai veni 4 băieţi şi ar pleca 4 fete, atunci numărul băieţilor ar fi de două ori mai mai mare decât numărul fetelor. Să se afle câţi elevi sunt în clasă.

2. Să se afle $z \in \mathbb{Z}$ astfel încât fracţia $\dfrac{3x+5}{2x-3}$ să reprezinte un număr întreg.

SUBIECTUL II

Fie ecuaţia $x^2 - mx + m - 1 = 0$, unde m este parametru real şi x_1, x_2 soluţiile ei.

a) Să se determine valorile parametrului m pentru care are loc relaţia

$$\frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 + x_2} > x_1 + x_2.$$

b) Să se determine m astfel încât $x_1^{10} + x_2^{10} = 2$.

SUBIECTUL III

1. Să se rezolve ecuaţia $\log_5(x+5) = 3 - \log_5(x+25)$.

2. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ şi matricea $B = \begin{pmatrix} u & v \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Determinaţi u, $v \in \mathbb{R}$ pentru care are loc egalitatea $AB = BA$.

3. Pe mulţimea $G = (3, \infty)$ se defineşte legea ”$\star$” prin $x \star y = xy - 3(x+y) + 12$.

- **a)** Să se arate că $(G, \star)$ este grup comutativ.
- **b)** Să se rezolve ecuaţia $x \star 8 = 13$.

SUBIECTUL IV

1. Se consideră rombul $ABCD$ şi un punct $F \in (BC)$. Dreapta DF intersectează dreapta AB în E. Notăm cu M mijlocul lui $[DF]$ şi cu G mijlocul lui $[EF]$. Să se arate că:

- **a)** triunghiurile BEG şi CDM sunt asemenea;
- **b)** $CD \cdot BG = CM \cdot BE$;
- **c)** $AD^2 = AE \cdot CF$.

2. Un paralelipiped dreptunghic are lungimea diagonalei egală cu $5\sqrt{38}$ cm şi dimensiunile direct proporţionale cu numerele 2, 3 şi 5.

- **a)** Să se calculeze dimensiunile paralelipipedului.
- **b)** Să se calculeze aria aria totală şi volumul paralelipipedului.
- **c)** Paralelipipedul este din lemn. Se vopsesc toate feţele lui, apoi se taie cu plane paralele cu feţele astfel încât să se obţină cuburi cu muchia de 5 cm.
  - **(i)** Câte tăieturi se vor face în total.
  - **(ii)** Dintre cuburile obţinute câte au vopsite numai trei feţe? Dar numai o faţă?

SESIUNEA IUNIE
Varianta 1

Profilul matematică - fizică, informatică, metrologie

SUBIECTUL I

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax^5+bx^2+c$, a, b, c parametri reali. Să se determine a, b şi c astfel încât să fie îndeplinite simultan următoarele condiţii:

$$f(0)=1,\quad f'(1)=36,\quad \int_0^1 f(x)\,dx=3.$$

2. Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ şi $A=\begin{pmatrix}0&1&2\\0&0&3\\0&0&0\end{pmatrix}$.

a) Să se determine matricele A^2 şi A^3.

b) Să se determine matricea $B=6A^5-3A^2+6I_2$.

c) Să se calculeze determinantul matricei B.

3. Să se rezolve ecuaţia $\log_2(25^x+7)=2+\log_2(5^x+1)$.

4. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(4,5)$, $B(-2,-3)$ şi $C(5,4)$.

a) Să se calculeze lungimile segmentelor $[AB]$, $[BC]$ şi $[AC]$.

b) Să se arate că triunghiul ABC este dreptunghic.

c) Să se determine coordonatele centrului cercului circumscris triunghiului ABC.

SUBIECTUL II

1. Se consideră polinomul $f=X^3-3X^2+aX-5$, $a\in\mathbb{R}$. Pentru $n\in\mathbb{N}^*$, definim $S_n=x_1^n+x_2^n+x_3^n$, unde x_1, x_2, $x_3\in\mathbb{C}$ sunt rădăcinile polinomului f.

a) Să se arate că $S_3-3S_2+aS_1-15=0$.

b) Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât $S_3=-21$.

2. Se consideră funcţiile f, $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{-x}\sin x$, $F(x)=-\dfrac{1}{2}e^{-x}\sin x-\dfrac{1}{2}e^{-x}\cos x$ şi $I_n=\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(x)\,dx$, $n\in\mathbb{N}$.

a) Să se arate că F este o primitivă a funcţiei f.

b) Să se calculeze I_0 şi să se arate că $I_k=(-1)^k e^{-k\pi}I_0$, pentru orice $k\in\mathbb{N}$.

SUBIECTUL III

Se consideră mulţimea numerelor reale $\mathbb{R}$ şi submulţimea sa $G=\{a+b\sqrt{2}\,|\,a,b\in\mathbb{Z},\ a^2-2b^2=1\}$.

a) Să se demonstreze că dacă a, b, c, $d\in\mathbb{Z}$ şi $a+b\sqrt{2}=c+d\sqrt{2}$, atunci $a=c$ şi $b=d$.

b) Să se demonstreze că G este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ faţă de operaţia de înmulţire a numerelor reale.

c) Să se arate că dacă $x=a+b\sqrt{2}$ şi $x\in G$, atunci $x\neq 0$ şi $\dfrac{1}{x}\in G$.

d) Să se găsească un element $x=a+b\sqrt{2}\in G$ cu proprietatea că $b\neq 0$.

e) Să se arate că mulţimea G are cel puţin 200 de elemente.

SUBIECTUL IV

Se consideră funcţiile f, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\left(\dfrac{3}{7}\right)^x+\left(\dfrac{4}{7}\right)^x-1$ şi $g(x)=f(x)-1+x$.

a) Să se determine $g'(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

b) Să se stabilească semnul funcţiei g'' şi să se precizeze monotonia funcţiei g'.

c) Utilizând teorema lui Rolle pentru funcţia g să se demonstreze că există $c \in (0, 1)$ astfel încât $g'(c) = 0$. Să se arate că punctul c este unic.

d) Deduceţi că funcţia g este strict descrescătoare pe $(0, c)$ şi strict crescătoare pe $(c, 1)$, unde c este definit la punctul c).

e) Să se arate că pentru orice $x \in [0, 1]$, $g(x) \leq 1$.

f) Să se arate că aria suprafeţei plane limitate de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x = 0$, $x = 1$, este mai mică decât $\frac{1}{2}$.

Varianta 2

Profilul matematică - fizică, informatică, metrologie

SUBIECTUL I

1. Se consideră polinomul cu coeficienţi reali $f = X^3 + 6X^2 + 11X + 6$.

- **a)** Să se calculeze $f(-1)$.
- **b)** Să se determine câtul şi restul împărţirii polinomului f la $X + 1$.
- **c)** Să se rezolve ecuaţia $f(x) = 0$.

2. Să se rezolve inecuaţia $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n \geq 64$, $n \in \mathbb{N}^*$.

3. Se consideră funcţia $g : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{6x^5 + 3x^2 + 1}{x^4}$. Să se stabilească asimptota oblică spre $+\infty$ la graficul funcţiei g.

4. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(3, 4)$, $B(-3, -4)$ şi $C(3, -4)$.

- **a)** Să se calculeze lungimile segmentelor $[AB]$, $[BC]$ şi $[AC]$.
- **b)** Să se arate că triunghiul ABC este dreptunghic.
- **c)** Să se determine coordonatele centrului cercului circumscris triunghiului ABC.

SUBIECTUL II

1. Se consideră mulţimea numerelor reale $\mathbb{R}$ pe care se defineşte legea de compoziţie $x \star y = 2xy - 6x - 6y + 21$, pentru orice x, $y \in \mathbb{R}$.

- **a)** Să se arate că legea "$\star$" este asociativă şi comutativă.
- **b)** Să se determine elementul neutru legii "$\star$".
- **c)** Considerăm mulţimea $G = (3, \infty)$. Să se demonstreze că G este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea "$\star$".

2. Se consideră funcţia $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1 + x3^x)$. Pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$ se defineşte $I_k = \displaystyle\int_0^1 \frac{3^k x}{1 + k3^k x^2}\, dx$.

- **a)** Să se calculeze $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{2x}$.
- **b)** Să se calculeze I_k, $k \in \mathbb{N}^*$.

SUBIECTUL III

1. Să se arate că $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = (y - x)(z - x)(z - y)$.

2. Se consideră a, b, c, d numere reale distincte două câte două. Se definesc funcţiile f, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x - a)(x - b)(x - c)(x - d)$ şi $g(x) = x^2 + x + 1$.

- **a)** Să se arate că $f'(x) = (a - b)(a - c)(a - d)$.
- **b)** Să se demonstreze că $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ g(a) & g(b) & g(c) & g(d) \end{vmatrix} = 0$.
- **c)** Dezvoltând determinantul Δ după ultima linie, deduceţi identitatea

$$\frac{g(a)}{f'(a)} + \frac{g(b)}{f'(b)} + \frac{g(c)}{f'(c)} + \frac{g(d)}{f'(d)} = 0.$$

SUBIECTUL IV

Se consideră funcţiile f, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \left(\dfrac{3}{8}\right)^x + \left(\dfrac{5}{8}\right)^x - 1$ şi $g(x) = f(x) - 1 + x$.

a) Să se determine $g'(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

b) Să se stabilească semnul funcţiei g'' şi să se precizeze monotonia funcţiei g'.

c) Utilizând teorema lui Rolle pentru funcţia g să se demonstreze că există $a \in (0,1)$ astfel încât $g'(a) = 0$. Să se arate că punctul a este unic.

d) Deduceţi că funcţia g este strict descrescătoare pe $(0, a)$ şi strict crescătoare pe $(a, 1)$, unde a este definit la punctul c).

e) Deduceţi că pentru orice $x \in [0,1]$, $g(x) \leq 0$.

f) Să se arate că aria suprafeţei plane limitate de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x = 0$, $x = 1$, este mai mică decât $\frac{1}{2}$.

Varianta 3

Profilul matematică - fizică, informatică, metrologie

SUBIECTUL I

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=xe^x$.

a) Să se determine $f'(x)$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

b) Să se rezolve ecuaţia $f'(x)=0$.

c) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)\,dx$.

2. Se consideră mulţimea numerelor reale $\mathbb{R}$ pe care se defineşte legea de compoziţie $x\star y=x+y+4$, pentru orice $x,\ y\in\mathbb{R}$.

a) Să se arate că legea "$\star$" este asociativă.

b) Să se arate că $e=-4$ este elementul neutru al legii "$\star$".

c) Să se verifice că pentru orice $x\in\mathbb{R}$ este adevărată relaţia $x\star(-x-8)=-4$.

3. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră cercul de ecuaţie $(x+3)^2+(y+5)^2=169$.

a) Să se determine coordonatele centrului şi raza cercului.

b) Să se verifice că punctul $P(2,7)$ este situat pe cerc.

c) Să se scrie ecuaţia tangentei la cerc în punctul $P(2,7)$.

SUBIECTUL II

1. Se consideră polinomul $(1+X+X^2)^{10}$ cu forma sa algebrică $f=a_{20}X^{20}+\ldots+a_1X+a_0$.

a) Să se determine a_0 şi a_1.

b) Să se calculeze $f(1)$, $f(-1)$, $f(i)$.

c) Să se calculeze suma coeficienţilor polinomului f.

d) Să se arate că $a_0+a_4+\ldots+a_{16}+a_{20}=\frac{1}{4}(f(1)+f(-1)+f(i)+f(-i))$.

2. Se consideră funcţiile $f,\ F:(-1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x+1)^2\ln(x+1)$ şi $F(x)=\frac{(x+1)^3}{3}\ln(x+1)-\frac{(x+1)^3}{9}+\frac{1}{9}$.

a) Să se arate că pentru orice $x\in(-1,\infty)$, $F'(x)=f(x)$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\frac{F(x)}{x^2}$.

SUBIECTUL III

Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}-4&2&2\\2&-4&2\\2&2&-4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&2&2\\2&2&2\\2&2&2\end{pmatrix}$ şi $C=aA+bB$, unde a, b sunt parametri reali.

a) Să se calculeze determinantul matricei A şi să se determine rangul ei.

b) Să se demonstreze că $\text{rang}(aA+bB)=3$ dacă şi numai dacă $ab\neq 0$.

c) Să se arate că $A^2=-6A$ şi $B^2=6B$.

d) Să se arate că $AB=BA$.

e) Să se demonstreze prin inducţie că dacă matricea $X\in\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ astfel încât $X^2=tX$, $t\in\mathbb{R}$, atunci pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ avem $X^n=t^{n-1}X$.

f) Să se determine matricea C^n, $\forall\ n\in\mathbb{N}^*$.

SUBIECTUL IV

Se consideră funcţiile $f,\ F:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x^b}$ şi $F(x)=\frac{1}{1-b}x^{1-b}$, $b\in\mathbb{R}$, $b>1$. Pentru $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 1$, definim şirul $a_n=f(1)+f(2)+\ldots+f(n)$.

a) Să se arate că F este o primitivă a funcţiei f.

b) Utilizând teorema lui Lagrange să se arate că pentru orice $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$, există $c_k \in (k, k+1)$ astfel încât $F(k+1) - F(k) = f(c_k)$.

c) Să se arate că pentru orice $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$, au loc inegalităţile:

$$\frac{1}{(k+1)^b} < F(k+1) - F(k) < \frac{1}{k^b}.$$

d) Să se arate că şirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este crescător.

e) Utilizând rezultatul de la punctul c), să se demonstreze că $a_n < \dfrac{b}{b-1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

f) Deduceţi că şirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este convergent.

Varianta 4

Profilul matematică - fizică, informatică, metrologie

SUBIECTUL I

1. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 4x + 1 + m$, unde m este un parametru real.

a) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât pentru orice $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$.

b) Să se verifice că pentru orice $m \in \mathbb{R}$, avem $f(\sqrt{7} - 2) = f(-\sqrt{7} - 2)$.

2. Se consideră mulţimea numerelor reale $\mathbb{R}$ pe care se defineşte legea de compoziţie $x \star y = x + y - 4$, pentru orice x, $y \in \mathbb{R}$.

a) Să se arate că legea "$\star$" este asociativă.

b) Să se arate că $e = 4$ este elementul neutru al legii "$\star$".

c) Să se verifice că pentru orice $x \in \mathbb{R}$ este adevărată relaţia $x \star (-x + 8) = 4$.

3. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(5, 6)$, $B(-1, -2)$ şi $C(6, 5)$.

a) Să se calculeze lungimile segmentelor $[AB]$, $[BC]$ şi $[AC]$.

b) Să se arate că triunghiul ABC este dreptunghic.

c) Să se determine coordonatele centrului cercului circumscris triunghiului ABC.

SUBIECTUL II

1. Se consideră polinomul $(1 - X + X^2)^{10}$ cu forma sa algebrică $f = a_{20}X^{20} + \ldots + a_1X + a_0$.

a) Să se determine a_0 şi a_1.

b) Să se calculeze $f(1)$, $f(-1)$, $f(i)$.

c) Să se calculeze suma coeficienţilor polinomului f.

d) Să se arate că $a_0 + a_4 + \ldots + a_{16} + a_{20} = \dfrac{1}{4}(f(1) + f(-1) + f(i) + f(-i))$.

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R}\backslash\{-1; 1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 1}$.

a) Să se determine a, $b \in \mathbb{R}$ cu proprietatea $f(x) = \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{b}{x-1}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}\backslash\{-1; 1\}$.

b) Să se calculeze $\displaystyle\int_2^3 f(x)\, dx$.

SUBIECTUL III

Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ şi $C = aA + bB$, unde a, b sunt parametri reali.

a) Să se calculeze determinantul matricei A şi să se determine rangul ei.

b) Să se demonstreze că $\text{rang}(aA + bB) = 3$ dacă şi numai dacă $ab \neq 0$.

c) Să se arate că $A^2 = 6A$ şi $B^2 = -6B$.

d) Să se arate că $AB = BA$.

e) Să se demonstreze prin inducţie că dacă matricea $X \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ astfel încât $X^2 = tX$, $t \in \mathbb{R}$, atunci pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ avem $X^n = t^{n-1}X$.

f) Să se determine matricea C^n, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

SUBIECTUL IV

Se consideră funcţiile f, $F : (1, \infty) \to \mathbb{R}$, $F(x) = \ln(1 + \ln x)$ şi $f(x) = \dfrac{1}{x(1 + \ln x)}$. Pentru $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, definim şirul $a_n = f(1) + f(2) + \ldots + f(n)$.

a) Să se arate că F este o primitivă a funcţiei f.

b) Utilizând teorema lui Lagrange să se arate că pentru orice $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, există $c_k \in (k, k+1)$ astfel încât $F(k+1) - F(k) = f(c_k)$.

c) Să se arate că pentru orice $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, au loc inegalităţile:

$$\frac{1}{(k+1)(1+\ln(k+1))} < F(k+1) - F(k) < \frac{1}{k(1+\ln k)}.$$

d) Să se arate că şirul $(a_n)_{n\geq 2}$ este crescător.

e) Utilizând rezultatul de la punctul c), să se demonstreze că $a_n \geq F(n+1) - F(2)$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

f) Deduceţi că limita şirului $(a_n)_{n\geq 2}$ este $+\infty$.

Varianta 5

Profilul matematică - fizică, informatică, metrologie

SUBIECTUL I

1. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2x + 1 + m$, unde m este un parametru real.

a) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât pentru orice $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$.

b) Să se verifice că pentru orice $m \in \mathbb{R}$, avem $f(\sqrt{5} - 1) = f(-\sqrt{5} - 1)$.

2. Să se rezolve ecuaţia $\log_2(9^x + 7) = 2 + \log_2(3^x + 1)$.

3. Se consideră funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 \ln x$

a) Să se determine $f'(x)$ pentru orice $x \in (0, \infty)$.

b) Să se determine primitiva $F : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ a funcţiei f care are proprietatea $F(1) = 0$.

4. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră dreptele de ecuaţii: $d_1 : x+2y-3 = 0$, $d_2 : 2x+y-3 = 0$ şi $d_3 : 3x + 2y - 5 = 0$.

a) Să se determine punctul de intersecţie al dreptelor d_1 şi d_2.

b) Să se arate că dreptele d_1, d_2 şi d_3 sunt concurente.

c) Să se scrie ecuaţia cercului de centru $O(0, 0)$ care trece prin punctul de concurenţă al celor trei drepte.

SUBIECTUL II

1. Se consideră polinomul $f = X^3 + X^2 + aX + 1$, $a \in \mathbb{R}$ şi $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$ rădăcinile sale. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, definim $S_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n$.

a) Să se arate că $S_3 + S_2 + aS_1 + 3 = 0$.

b) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $S_3 = -1$.

2. Se consideră funcţiile $f, F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a \sin x + b \sin 3x + c \sin 5x$ şi $F(x) = -a \cos x - \frac{b}{3} \cos 3x - \frac{c}{5} \cos 5x$.

a) Să se arate că pentru orice $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = f(x)$.

b) Să se calculeze $F\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$, pentru orice $k \in \mathbb{Z}$.

c) Să se arate că dacă $f(x) \geq 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, atunci F este identic zero.

SUBIECTUL III

a) În mulţimea numerelor complexe $\mathbb{C}$, să se demonstreze că dacă $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, atunci

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2},\ \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2},\ \overline{\overline{z_1}} = z_1.$$

Se notează cu $\overline{z}$ conjugatul lui z.

Se consideră $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$, mulţimea matricelor pătratice de ordin doi peste $\mathbb{C}$, şi submulţimea

$$H = \left\{ A = \begin{pmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{pmatrix} \middle|\ z, w \in \mathbb{C} \right\}.$$

b) Să se demonstreze că pentru orice $A, B \in H$, matricea $A \cdot B \in H$.

c) Să se demonstreze că dacă $A \in H$ şi are determinantul zero, atunci $A = O_2$.

d) Să se arate că dacă $A \in H$ şi $A \neq O_2$, atunci $A^{-1} \in H$.

e) Să se găsească $A, B \in H$ având proprietatea $A \cdot B \neq B \cdot A$.

SUBIECTUL IV

Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, se consideră funcţia $f_n : \left[0, \frac{\pi}{3}\right] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{\sin^n x}{9 + \cos^2 x}$, şi integrala $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} f_n(x)\, dx$.

a) Să se calculeze I_1.

b) Să se determine derivata $f_n'(x)$, $\forall\ x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$, $n \in \mathbb{N}^*$.

c) Să se arate că funcţia f_n este crescătoare.

d) Să se demonstreze că pentru $x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ are loc relaţia $0 \leq f_n(x) \leq f_n\left(\frac{\pi}{3}\right)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

e) Să se arate că $0 \leq I_n \leq f_n\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot \frac{\pi}{3}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

f) Să se determine limita şirului $(I_n)_{n\geq 1}$.

Varianta 6

Profilul matematică - fizică, informatică, metrologie

SUBIECTUL I

1. Se consideră funcţiile $f,\, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 8x + 1$ şi $g(x) = -x^2 + 4x - 17$.

a) Să se arate că $f(x) - g(x) \geq 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

b) Să se calculeze aria suprafeţei plane limitate de graficele funcţiilor f şi g, şi dreptele de ecuaţii $x = -1$, $x = 0$.

2. Se consideră mulţimea numerelor reale $\mathbb{R}$ pe care se defineşte legea de compoziţie $x \star y = x + y - 10$, pentru orice $x,\, y \in \mathbb{R}$.

b) Să se arate că legea "$\star$" este comutativă.

b) Să se arate că legea "$\star$" este asociativă.

c) Să se arate că $e = 10$ este elementul neutru al legii "$\star$".

d) Să se verifice că pentru orice $x \in \mathbb{R}$ este adevărată relaţia $x \star (-x + 20) = 10$.

3. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră cercul de ecuaţie $(x - 6)^2 + (y - 3)^2 = 25$.

a) Să se determine coordonatele centrului şi raza cercului.

b) Să se verifice că punctul $P(9, 7)$ este situat pe cerc.

c) Să se scrie ecuaţia tangentei la cerc în punctul $P(9, 7)$.

SUBIECTUL II

1. Se consideră polinomul $(1 - 2X + X^2)^{10}$ cu forma sa algebrică $f = a_{20}X^{20} + \ldots + a_1X + a_0$.

a) Să se determine a_0 şi a_1.

b) Să se calculeze $f(1)$, $f(-1)$, $f(i)$.

c) Să se calculeze suma coeficienţilor polinomului f.

d) Să se arate că $a_0 + a_4 + \ldots + a_{16} + a_{20} = \dfrac{1}{4}(f(1) + f(-1) + f(i) + f(-i))$.

2. Se consideră funcţiile $f,\, F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a\cos x + b\cos 2x + c\cos 3x$ şi $F(x) = a\sin x + \dfrac{b}{2}\sin 2x + \dfrac{c}{3}\sin 3x$.

a) Să se arate că funcţia F este o primitivă a funcţiei f.

b) Să se calculeze $F(k\pi)$, pentru orice $k \in \mathbb{Z}$.

c) Să se arate că dacă $f(x) \geq 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, atunci F este identic zero.

SUBIECTUL III

a) În mulţimea numerelor complexe $\mathbb{C}$, să se demonstreze că dacă $z_1,\, z_2 \in \mathbb{C}$, atunci

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2},\ \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2},\ \overline{\overline{z_1}} = z_1.$$

Se notează cu $\overline{z}$ conjugatul lui z.

Se consideră $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$, mulţimea matricelor pătratice de ordin doi peste $\mathbb{C}$, şi submulţimea

$H = \left\{ A = \begin{pmatrix} z & -\overline{w} \\ w & \overline{z} \end{pmatrix} \,\middle|\, z, w \in \mathbb{C} \right\}$.

b) Să se demonstreze că pentru orice $A,\, B \in H$, matricea $A \cdot B \in H$.

c) Să se demonstreze că dacă $A \in H$ şi are determinantul zero, atunci $A = O_2$.

d) Să se arate că dacă $A \in H$ şi $A \neq O_2$, atunci $A^{-1} \in H$.

e) Să se găsească $A,\, B \in H$ având proprietatea $A \cdot B \neq B \cdot A$.

SUBIECTUL IV

Se consideră $I_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x}\, dx$ şi $I_k = \int_0^1 x^k \cdot \sqrt{1-x}\, dx$, $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se calculeze I_0.

b) Să se demonstreze că pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$, $I_k = \dfrac{2k}{2k+3} \cdot I_{k-1}$.

c) Pentru $x \in [0,1)$ se defineşte suma $S_n(x) = \sqrt{1-x} + x\sqrt{1-x} + \ldots + x^{n-1}\sqrt{1-x}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$.

Varianta 7

Profilul matematică - fizică, informatică, metrologie

SUBIECTUL I

1. Se consideră polinomul cu coeficienţi reali $f = 2X^3 - 3X^2 - 17X + 30$.

a) Să se calculeze $f(2)$.

b) Să se determine câtul şi restul împărţirii polinomului f la $X - 2$.

c) Să se rezolve ecuaţia $f(x) = 0$.

2. Să se rezolve ecuaţia $2e^{3x} - 3e^{2x} - 17e^x + 30 = 0$.

3. Să se determine $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $\int_0^x (6t^2 - 6t - 17)\, dt + 30 = 0$.

4. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(-3, 4)$, $B(5, -2)$ şi C mijlocul segmentului $[AB]$.

a) Să se determine coordonatele punctului C şi lungimea segmentului $[AB]$.

b) Să se scrie ecuaţia cercului de diametru $[AB]$.

c) Să se scrie ecuaţia tangentei la cercul de diametru $[AB]$ care trece prin punctul $D(4, 5)$.

SUBIECTUL II

1. În mulțimea matricelor pătratice de ordinul trei peste $\mathbb{C}$, se consideră matricele $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Să se determine matricele A^2 şi A^3.

b) Să se arate că pentru orice $z \in \mathbb{C}$ determinantul matricei $I_3 + zA$ este egal cu 1.

c) Să se demonstreze că $I_3 = (I_3 + A)(I_3 - A + A^2)$.

d) Să se arate că matricea $I_3 + A$ este inversabilă şi să se precizeze inversa sa.

2. **a)** Să se demonstreze că pentru orice $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 1$, are loc identitatea:

$$x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{x^{n+1} - x}{x - 1}.$$

b) Derivând ambii termeni ai identităţii de la punctul a), să se demonstreze că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$,

$$1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x - 1)^2}.$$

SUBIECTUL III

Se consideră mulţimea numerelor reale $\mathbb{R}$ pe care se defineşte legea de compoziţie $x \star y = 2xy - 6x - 6y + 21$, pentru orice x, $y \in \mathbb{R}$.

a) Să se arate că legea "$\star$" este asociativă şi comutativă.

b) Să se determine elementul neutru al legii "$\star$".

c) Să se demonstreze că pentru orice $x \in \mathbb{R}$ are loc identitatea

$$\underbrace{x \star x \star \ldots \star x}_{\text{de } n \text{ ori}} = 2^{n-1}(x - 3)^n + 3,\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

SUBIECTUL IV

Se consideră funcţia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x^2+2x+2}$ şi se defineşte şirul (I_n) astfel: $I_0 = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ şi $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n f(x)\,dx$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

a) Să se calculeze I_0 şi I_1.

b) Să se demonstreze că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} + 2I_{n+1} + 2I_n = \dfrac{1}{n+1}$.

c) Să se arate că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} \leq I_n$.

d) Utilizând punctele b) şi c) să se demonstreze că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, $5I_{n+2} \leq \dfrac{1}{n+1} \leq 5I_n$.

e) Să se demonstreze că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\dfrac{1}{5(n+1)} \leq I_n \leq \dfrac{1}{5(n-1)}$.

f) Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n = f(1)$.

Varianta 8

Profilul matematică - fizică, informatică, metrologie

SUBIECTUL I

1. Se consideră polinomul cu coeficienţi reali $f = 2X^3 - X^2 - 5X - 2$.

a) Să se calculeze $f(-1)$.

b) Să se determine câtul şi restul împărţirii polinomului f la $X + 1$.

c) Să se rezolve ecuaţia $f(x) = 0$.

2. Să se rezolve ecuaţia $2(\ln x)^3 - (\ln x)^2 - 5\ln x - 2 = 0$, $x > 0$.

3. Să se determine $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $\int_0^x (6t^2 - 2t - 5)\,dt - 2 = 0$.

4. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(-3, 4)$, $B(5, -4)$ şi C mijlocul segmentului $[AB]$.

a) Să se determine coordonatele punctului C şi lungimea segmentului $[AB]$.

b) Să se scrie ecuaţia cercului de diametru $[AB]$.

c) Să se scrie ecuaţia tangentei la cercul de diametru $[AB]$ care trece prin punctul $D(6, \sqrt{7})$.

SUBIECTUL II

1. În $\mathbb{C}[X]$, mulţimea polinoamelor cu coeficienţi complecşi, se consideră polinomul $f = (X + i)^6 + (X - i)^6$, cu rădăcinile $x_1, x_2, \ldots, x_6 \in \mathbb{C}$.

a) Să se calculeze $f(0)$.

b) Considerând forma algebrică a polinomului $f = a_6X^6 + a_5X^5 + \ldots + a_1X + a_0$, determinaţi coeficienţii a_6, a_5 şi a_4.

c) Să se calculeze suma $S = x_1 + x_2 + \ldots + x_6$.

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (1 + x)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se arate că pentru orice $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^n x^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Derivând cele două expresii ale lui f să se demonstreze că pentru orice $x \in \mathbb{R}$ are loc identitatea:

$$n(1 + x)^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 x + 3C_n^3 x^2 + \ldots + nC_n^n x^{n-1},\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

SUBIECTUL III

1. Să se arate că $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = (y - x)(z - x)(z - y)$.

2. Se consideră a, b, c, d numere reale distincte două câte două. Se definesc funcţiile f, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x - a)(x - b)(x - c)(x - d)$ şi $g(x) = x^2 + x + 1$.

a) Să se arate că $f'(x) = (a - b)(a - c)(a - d)$.

b) Să se demonstreze că $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ g(a) & g(b) & g(c) & g(d) \end{vmatrix} = 0$.

c) Dezvoltând determinantul Δ după ultima linie, deduceţi identitatea

$$\frac{g(a)}{f'(a)} + \frac{g(b)}{f'(b)} + \frac{g(c)}{f'(c)} + \frac{g(d)}{f'(d)} = 0.$$

SUBIECTUL IV

Se consideră funcţia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x^2+4x+5}$ şi se defineşte şirul (I_n) astfel: $I_0 = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ şi $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n f(x)\,dx$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

a) Să se calculeze I_0 şi I_1.

b) Să se demonstreze că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} + 4I_{n+1} + 5I_n = \dfrac{1}{n+1}$.

c) Să se arate că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} \leq I_n$.

d) Utilizând punctele b) şi c) să se demonstreze că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, $10I_{n+2} \leq \dfrac{1}{n+1} \leq 10I_n$.

e) Să se demonstreze că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\dfrac{1}{10(n+1)} \leq I_n \leq \dfrac{1}{10(n-1)}$.

f) Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n = f(1)$.

Varianta 9

Profilul matematică - fizică, informatică, metrologie

SUBIECTUL I

1. Se consideră polinomul cu coeficienţi reali $f = X^3 - 2X^2 - 5X + 6$.

- **a)** Să se calculeze $f(1)$.
- **b)** Să se determine câtul şi restul împărţirii polinomului f la $X - 1$.
- **c)** Să se rezolve ecuaţia $f(x) = 0$.

2. Să se rezolve ecuaţia $(\ln x)^3 - 2(\ln x)^2 - 5\ln x + 6 = 0$, $x > 0$.

3. Să se determine $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $\displaystyle\int_0^x (3t^2 - 4t - 5)\,dt + 6 = 0$.

4. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră dreptele de ecuaţii: $d_1 : 3x - 2y = 0$, $d_2 : x + 3y - 11 = 0$ şi $d_3 : 2x - 3y + 5 = 0$.

- **a)** Să se determine punctul de intersecţie al dreptelor d_1 şi d_2.
- **b)** Să se arate că dreptele d_1, d_2 şi d_3 sunt concurente.
- **c)** Să se scrie ecuaţia cercului de centru $O(0, 0)$ care trece prin punctul de concurenţă al celor trei drepte.

SUBIECTUL II

1. Se consideră polinomul $f = X^3 - X^2 + aX - 1$, $a \in \mathbb{R}$. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, definim $S_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n$, unde x_1, x_2, $x_3 \in \mathbb{C}$ sunt rădăcinile polinomului f.

- **a)** Să se arate că $S_3 - S_2 + aS_1 - 3 = 0$.
- **b)** Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $S_3 = 1$.

2. Pentru orice $x \in [0, 1)$ se defineşte suma

$$S_n(x) = \sqrt{1-x} + x\sqrt{1-x} + \cdots + x^{n-1}\sqrt{1-x},\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*.$$

- **a)** Să se arate că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sqrt{1-x} \cdot \dfrac{1 - x^n}{1 - x}$, $x \in [0, 1)$.
- **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)$.
- **c)** Să se calculeze $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x}\,dx$.

SUBIECTUL III

În $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, mulţimea matricelor pătratice de ordinul doi peste $\mathbb{R}$, se consideră matricea $X(a) = \begin{pmatrix} 1+5a & 10a \\ -2a & 1-4a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$.

- **a)** Să se calculeze determinantul matricei $X(a)$.
- **b)** Pentru orice a, $b \in \mathbb{R}$, să se arate că $X(a) \cdot X(b) = X(ab + a + b)$.

  Se consideră mulţimea $G = \{X(a) \mid a \in (-1, \infty)\}$.
- **c)** Să se demonstreze că G este parte stabilă a lui $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ în raport cu operaţia de înmulţire a matricelor.
- **d)** Să se determine $(X(1))^2$.
- **e)** Să se demonstreze, utilizând metoda inducţiei matematice, că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $(X(1))^n = X(2^n - 1)$.

SUBIECTUL IV

Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x - 1 + \dfrac{x^2}{2}$.

a) Să se determine f' şi f''.

b) Să se arate că $f'(x) > 0, \forall\, x \in (0, \infty)$ şi $f'(x) < 0, \forall\, x \in (-\infty, 0)$.

c) Să se demonstreze că pentru orice $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$.

d) Pentru funcţia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \cos x$, să se arate că aria suprafeţei plane limitate de graficul funcţiei g, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x = 0$, $x = 1$, este mai mare decât $\frac{5}{6}\cdot$

Varianta 10

Profilul matematică - fizică, informatică, metrologie

SUBIECTUL I

1. Se consideră polinomul cu coeficienţi reali $f = 6X^3 - 5X^2 - 2X + 1$.

a) Să se calculeze $f(1)$.

b) Să se determine câtul şi restul împărţirii polinomului f la $X - 1$.

c) Să se rezolve ecuaţia $f(x) = 0$.

2. Să se rezolve ecuaţia $6(\ln x)^3 - 5(\ln x)^2 - 2\ln x + 1 = 0$, $x > 0$.

3. Să se determine $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $\displaystyle\int_0^x (3t^2 - 4t - 5)\,dt + 6 = 0$.

4. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră dreptele de ecuaţii: $d_1 : x + 2y + 6 = 0$, $d_2 : 2x + y + 6 = 0$ şi $d_3 : 3x + 2y + 10 = 0$.

a) Să se determine punctul de intersecţie al dreptelor d_1 şi d_2.

b) Să se arate că dreptele d_1, d_2 şi d_3 sunt concurente.

c) Să se scrie ecuaţia cercului de centru $O(0, 0)$ care trece prin punctul de concurenţă al celor trei drepte.

SUBIECTUL II

1. În $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, mulţimea matricelor pătratice de ordinul doi peste $\mathbb{R}$, se consideră matricea $X(a) = \begin{pmatrix} 1+2a & a \\ -2a & 1-a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$.

a) Să se arate că pentru orice a, $b \in \mathbb{R}$, $X(a) \cdot X(b) = X(ab + a + b)$.
Se defineşte mulţimea $G = \{X(a) \mid a \in (-1, \infty)\}$.

b) Să se demonstreze că G este parte stabilă a lui $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ în raport cu operaţia de înmulţire a matricelor.

c) Să se demonstreze, utilizând metoda inducţiei matematice, că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $(X(1))^n = X(2^n - 1)$.

2. Se consideră funcţia $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1 + x5^x)$. Pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$ se defineşte $I_k = \displaystyle\int_0^1 \frac{5^k x}{1 + k5^k x^2}\,dx$.

a) Să se calculeze $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{2x}$.

b) Să se calculeze I_k, $k \in \mathbb{N}^*$.

SUBIECTUL III

1. Să se arate că $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = (y - x)(z - x)(z - y)$.

2. Se consideră a, b, c numere reale distincte două câte două. Se definesc funcţiile f, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x - a)(x - b)(x - c)$ şi $g(x) = x^2 - 3x + 2$.

a) Să se arate că $f'(x) = (a - b)(a - c)$.

b) Să se demonstreze că $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ g(a) & g(b) & g(c) \end{vmatrix} = (b - a)(c - a)(c - b)$.

c) Dezvoltând determinantul Δ după ultima linie, deduceţi identitatea

$$\frac{g(a)}{f'(a)} + \frac{g(b)}{f'(b)} + \frac{g(c)}{f'(c)} = 1.$$

SUBIECTUL IV

Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x - 1 + \dfrac{x^2}{2}\cdot$

a) Să se determine f' şi f''.

b) Să se arate că $f'(x) > 0$, $\forall\, x \in (0, \infty)$ şi $f'(x) < 0$, $\forall\, x \in (-\infty, 0)$.

c) Să se demonstreze că pentru orice $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$.

d) Deduceţi că pentru orice $x \in \mathbb{R}$ are loc inegalitatea $\cos(x^2) \geq 1 - \dfrac{x^4}{2}\cdot$

e) Pentru funcția $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \cos(x^2)$, să se arate că aria suprafeţei plane limitate de graficul funcţiei g, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x = 0$, $x = 1$, este mai mare decât $\dfrac{9}{10}\cdot$

SESIUNEA IUNIE
Varianta 1

Profilul economic, fizică-chimie şi chimie-biologie

SUBIECTUL I

1. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^5 + bx^2 + c$, unde a, b, c sunt parametri reali. Să se determine a, b şi c astfel încât să fie îndeplinite simultan următoarele condiţii:

$f(0) = 1$, $f'(1) = 36$, $\int_0^1 f(x)\, dx = 3$.

2. Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $A = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$.

a) Să se determine matricea A^2.

b) Să se determine matricea $B = 6A^5 - 3A^2 + 6I_2$.

c) Să se calculeze determinantul matricei $B = 6A^5 - 3A^2 + 6I_2$.

3. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(4, 5)$, $B(-2, -3)$ şi $C(5, 4)$.

a) Să se calculeze lungimile segmentelor $[AB]$, $[BC]$ şi $[AC]$.

b) Să se arate că triunghiul ABC este dreptunghic.

c) Să se determine coordonatele centrului cercului circumscris triunghiului ABC.

SUBIECTUL II

1. Se consideră polinomul $f = X^3 - 3X^2 + aX - 5$, $a \in \mathbb{R}$. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, definim $S_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n$, unde x_1, x_2, $x_3 \in \mathbb{C}$ sunt rădăcinile polinomului f.

a) Să se arate că $S_3 - 3S_2 + aS_1 - 15 = 0$.

b) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $S_3 = -21$.

2. Se consideră $I(t) = \int_0^t (\cos x + 2\sin x)\, dx$, $t \in (0, \infty)$.

a) Să se determine $I(t)$, $t \in (0, \infty)$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{I(t)}{t}$.

SUBIECTUL III

Se consideră mulţimea numerelor reale $\mathbb{R}$ pe care se defineşte legea de compoziţie $x \star y = xy - 4x - 4y + 20$, oricare ar fi x, $y \in \mathbb{R}$.

a) Să se arate că legea este asociativă.

b) Să se determine $e \in \mathbb{R}$ astfel încât $x \star e = x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

Fie mulţimea $G = (4, \infty)$.

c) Să se arate că G este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea "$\star$".

d) Să se rezolve în G ecuaţia $\underbrace{x \star x \star \ldots \star x}_{\text{de 10 ori } x} = 5$.

SUBIECTUL IV

1. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R}\backslash\{3\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + c}{x - 3}$, unde a, b, c parametri reali. Să se determine a, b şi c astfel încât graficul funcţiei f să admită asimptota $y = x + 2$, iar punctul $A(1, 1)$ să se afle pe grafic.

2. Se consideră funcţia $g : \mathbb{R}\backslash\{3\} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 3}$.

a) Să se stabilească intervalele de monotonie ale funcţiei g.

b) Să se arate că $g(x) = x + 2 + \dfrac{4}{x-3}$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}\backslash\{3\}$.

c) Să se demonstreze că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $g^{(n)}(x) = (-1)^n(n!)\dfrac{4}{(x-3)^{n+1}}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}\backslash\{3\}$.

Varianta 2

Profilul economic, fizică-chimie şi chimie-biologie

SUBIECTUL I

1. Se consideră polinomul cu coeficienţi reali $f = X^3 + 6X^2 + 11X + 6$.

a) Să se calculeze $f(-1)$.

b) Să se determine câtul şi restul împărţirii lui f la $X + 1$.

c) Să se rezolve ecuaţia $f(x) = 0$.

2. Să se rezolve ecuaţia $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 4$, $n \in \mathbb{N}^*$.

3. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(3, 4)$, $B(-3, -4)$ şi $C(3, -4)$.

a) Să se calculeze lungimile segmentelor $[AB]$, $[BC]$ şi $[AC]$.

b) Să se arate că triunghiul ABC este dreptunghic.

c) Să se determine coordonatele centrului cercului circumscris triunghiului ABC.

SUBIECTUL II

1. Se consideră mulţimea numerelor reale $\mathbb{R}$ pe care se defineşte legea de compoziţie $x \star y = 4xy - 4x - 4y + 5$, oricare ar fi x, $y \in \mathbb{R}$.

a) Să se arate că legea "$\star$" este asociativă şi comutativă.

b) Să se determine elementul neutru al legii "$\star$".

c) Să se demonstreze că mulţimea $G = (1, \infty)$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea "$\star$".

2. Se consideră funcţia $g : \mathbb{R}\setminus\{1\} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 4x - 1 + \dfrac{1}{x - 1}$.

a) Să se determine $g'(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$.

b) Să se stabilească asimptota oblică spre $+\infty$ la graficul funcţiei g.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{g(x)}{x}$.

SUBIECTUL III

1. Să se arate că $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = (y - z)(z - x)(z - y)$.

2. Se consideră a, b, c numere reale distincte două câte două. Se definesc funcţiile f, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x - a)(x - b)(x - c)$ şi $g(x) = x^2 - 2x + 3$.

a) Să se arate că $f'(a) = (a - b)(a - c)$.

b) Să se demonstreze că $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ g(a) & g(b) & g(c) \end{vmatrix} = (b - a)(c - a)(c - b)$.

c) Dezvoltând determinantul Δ după ultima linie deduceţi identitatea

$$\frac{g(a)}{f'(a)} + \frac{g(b)}{f'(b)} + \frac{g(c)}{f'(c)} = 1.$$

SUBIECTUL IV

Se consideră integralele $I_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{4 + x^2}\,dx$ şi $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{4 + x^2}\,dx$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se calculeze I_0 şi I_1.

b) Să se demonstreze că pentru orice $n \in \mathbb{N}$ este adevărată relaţia

$$4I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}.$$

c) Să se arate că pentru orice $x \in [0,1]$, $0 \leq \dfrac{x^n}{4+x^2} \leq x^n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

d) Să se determine limita şirului $(nI_n)_{n\geq 1}$.

Varianta 3

Profilul economic, fizică-chimie şi chimie-biologie

SUBIECTUL I

1. Se consideră mulţimea numerelor reale $\mathbb{R}$ pe care se defineşte legea de compoziţie $x \star y = x + y + 4$, pentru orice x, $y \in \mathbb{R}$.

a) Să se arate că legea "$\star$" este asociativă.

b) Să se arate că $e = -4$ este elementul neutru al legii "$\star$".

c) Să se verifice că pentru orice $x \in \mathbb{R}$ este adevărată relaţia $x \star (-x - 8) = -4$.

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = xe^x$.

a) Să se determine $f'(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

b) Să se rezolve ecuaţia $f'(x) = 0$.

c) Să se calculeze $\displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx$.

3. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră cercul de ecuaţie $(x - 5)^2 + (y - 4)^2 = 25$.

a) Să se determine coordonatele centrului şi raza cercului.

b) Să se verifice că punctul $P(9, 7)$ este situat pe cerc.

c) Să se scrie ecuaţia tangentei la cerc în punctul $P(9, 7)$.

SUBIECTUL II

1. În $\mathbb{C}[X]$, mulţimea polinoamelor cu coeficienţi complecşi, se consideră polinomul $f = (X + i)^7 + (X - i)^7$, cu rădăcinile $x_1, x_2, \ldots, x_7 \in \mathbb{C}$.

a) Să se calculeze $f(0)$.

b) Considerând forma algebrică a polinomului $f = a_7X^7 + a_6X^6 + \ldots + a_1X + a_0$, determinaţi coeficienţii a_7, a_6 şi a_5.

c) Să se calculeze suma $S = x_1 + x_2 + \ldots + x_7$.

2. Se consideră funcţiile $f, F : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x+1)^2 \ln(x+1)$ şi $F(x) = \dfrac{(x+1)^3}{3} \ln(x+1) - \dfrac{(x+1)^3}{9} + \dfrac{1}{9}$.

a) Să se arate că F este o primitivă a funcţiei f.

b) Să se calculeze $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{F(x)}{x^2}$.

SUBIECTUL III

În $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, mulţimea matricelor pătratice de ordinul doi peste $\mathbb{R}$, se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze A^2.

b) Să se determine $X \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, $X = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$, astfel încât determinantul matricei $X + A$ să fie egal cu 2.

c) Să se demonstreze că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = A$.

d) Să se demonstreze că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $A + 2A^2 + \ldots + nA^n = \dfrac{n(n+1)}{2}A$.

SUBIECTUL IV

Se consideră funcţiile $f, F : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^{-\frac{3}{2}}$ şi $F(x) = -\dfrac{2}{\sqrt{x}}$.

Pentru $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, definim şirul $a_n = f(1) + f(2) + \ldots + f(n)$.

a) Să se arate că F este o primitivă a funcţiei f.

b) Utilizând teorema lui Lagrange să se arate că pentru orice $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$, există $c_k \in (k, k+1)$ astfel încât $F(k+1) - F(k) = f(c_k)$.

c) Să se arate că pentru orice $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$, au loc inegalităţile:

$$(k+1)^{\frac{3}{2}} < F(k+1) - F(k) < k^{\frac{3}{2}}.$$

d) Să se arate că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este crescător.

e) Utilizând rezultatul de la punctul c), să se demonstreze că $a_n < 3$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

f) Deduceţi că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

Varianta 4

Profilul economic, fizică-chimie şi chimie-biologie

SUBIECTUL I

1. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 4x + 1 + m$, unde m este un parametru real.

- **a)** Să se determine $m \in \mathbb{R}$ atfel încât pentru orice $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$.
- **b)** Să se verifice că pentru orice $m \in \mathbb{R}$, avem $f(\sqrt{7} - 2) = f(-\sqrt{7} - 2)$.

2. Se consideră mulţimea numerelor reale $\mathbb{R}$ pe care se defineşte legea de compoziţie $x \star y = x + y - 4$, pentru orice x, $y \in \mathbb{R}$.

- **a)** Să se arate că legea "$\star$" este asociativă.
- **b)** Să se arate că $e = 4$ este elementul neutru al legii "$\star$".
- **c)** Să se verifice că pentru orice $x \in \mathbb{R}$ este adevărată relaţia $x \star (-x + 8) = 4$.

3. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(5, 6)$, $B(-1, -2)$ şi $C(6, 5)$.

- **a)** Să se calculeze lungimile segmentelor $[AB]$, $[BC]$ şi $[AC]$.
- **b)** Să se arate că triunghiul ABC este dreptunghic.
- **c)** Să se determine coordonatele centrului cercului circumscris triunghiului ABC.

SUBIECTUL II

1. Se consideră polinomul $f = (X + 1)^5 + (X - 1)^5$, cu rădăcinile $x_1, x_2, \ldots, x_5 \in \mathbb{C}$.

- **a)** Să se calculeze $f(0)$.
- **b)** Considerând forma algebrică a polinomului $f = a_5X^5 + a_4X^4 + \ldots + a_1X + a_0$, determinaţi coeficienţii a_5, a_4 şi a_3.
- **c)** Să se calculeze suma $S = x_1 + x_2 + \ldots + x_5$.
- **d)** Să se calculeze suma $T = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_5^2$.

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R}\backslash\{-1; 1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 1}$.

- **a)** Să se determine a, $b \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că $f(x) = \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{b}{x-1}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$.
- **b)** Să se calculeze $\displaystyle\int_2^3 f(x)\, dx$.

SUBIECTUL III

Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ şi $C = A + B$.

- **a)** Să se calculeze determinantul matricei A.
- **b)** Să se demonstreze că $\operatorname{rang}(A + B) = 3$.
- **c)** Să se arate că $A^2 = -6A$ şi $B^2 = 6B$.
- **d)** Să se arate că $AB = BA$.
- **e)** Să se demonstreze prin inducţie că dacă matricea $X \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ astfel încât $X^2 = tX$, $t \in \mathbb{R}$, atunci pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ avem $X^n = t^{n-1}X$.
- **f)** Să se determine matricea C^n, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

SUBIECTUL IV

Pentru orice $x \in [0,1)$ se defineşte suma

$$S_n(x) = \sqrt{2+x} + x\sqrt{2+x} + \ldots + x^{n-1}\sqrt{2+x},\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*.$$

a) Să se arate că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n(x) = \sqrt{2+x} \cdot \dfrac{1-x^n}{1-x}$, $x \in [0,1)$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)$.

c) Să se calculeze $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{2+x}\ dx$.

Varianta 5

Profilul economic, fizică-chimie şi chimie-biologie

SUBIECTUL I

1. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2x + 1 + m$, unde m este un parametru real.

- **a)** Să se determine $m \in \mathbb{R}$ atfel încât pentru orice $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$.
- **b)** Să se verifice că pentru orice $m \in \mathbb{R}$, avem $f(\sqrt{5} - 2) = f(-\sqrt{5} - 2)$.

2. Se consideră funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 \ln x$.

- **a)** Să se determine $f'(x)$ pentru orice $x \in (0, \infty)$.
- **b)** Să se determine primitivele funcţiei f, $\displaystyle\int f(x)\, dx$, $x \in (0, \infty)$.

3. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră dreptele de ecuaţii $d_1 : x + 2y - 3 = 0$, $d_2 : 2x + y - 3 = 0$ şi $d_3 : 3x + 2y - 5 = 0$.

- **a)** Să se determine punctul de intersecţie al dreptelor d_1 şi d_2.
- **b)** Să se arate că dreptele d_1, d_2 şi d_3 sunt concurente.
- **c)** Să se scrie ecuaţia cercului de centru $O(0, 0)$ care trece prin punctul de concurenţă al celor trei drepte.

SUBIECTUL II

1. Se consideră polinomul $f = X^3 + X^2 + aX + 1$, $a \in \mathbb{R}$ care are rădăcinile x_1, x_2, $x_3 \in \mathbb{C}$.
Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, definim $S_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n$.

- **a)** Să se arate că $S_3 + S_2 + aS_1 + 3 = 0$.
- **b)** Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $S_3 = -1$.

2. Se consideră funcţiile f, $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a \sin x + b \sin 3x + c \sin 5x$ şi $F(x) = -a \cos x - \dfrac{b}{3} \cos 3x - \dfrac{c}{5} \cos 5x$.

- **a)** Să se arate că $F'(x) = f(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.
- **b)** Să se calculeze $F\left(2k\pi + \dfrac{\pi}{2}\right)$, pentru orice $k \in \mathbb{Z}$.
- **c)** Să se calculeze $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}} f(x)\, dx$.

SUBIECTUL III

a) În mulţimea numerelor complexe $\mathbb{C}$, să se demonstreze că dacă z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$, atunci

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}.$$

Se notează cu $\overline{z}$ conjugatul lui z.
Se consideră $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$, mulţimea matricelor pătratice de ordin doi peste $\mathbb{C}$, şi submulţimea
$H = \left\{ A = \begin{pmatrix} z & -\overline{w} \\ w & \overline{z} \end{pmatrix} \,\middle|\, z, w \in \mathbb{C} \right\}$.

b) Să se demonstreze că pentru orice A, $B \in H$, matricea $A + B \in H$.

c) Să se verifice că matricea $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ aparţine mulţimii H.

d) Să se arate că dacă $A \in H$, atunci $-A \in H$.

e) Să se arate că submulţimea H a lui $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$, împreună cu operaţia de adunare indusă, formează o structură de grup comutativ.

f) Să se demonstreze că dacă $A \in H$ şi are determinantul zero, atunci $A = O_2$.

SUBIECTUL IV

Se defineşte şirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ astfel: $I_0 = \int_0^1 \frac{1}{x+3}\, dx$ şi $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+3}\, dx$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

a) Să se calculeze I_0 şi I_1.

b) Să se demonstreze că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, avem $I_{n+1} + 3I_n = \frac{1}{n+1}\cdot$

c) Să se arate că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, avem $I_{n+1} \leq I_n$.

d) Utilizând punctele b) şi c), să se demonstreze că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, au loc inegalităţile:

$$4I_{n+1} \leq \frac{1}{n+1} \leq 4I_n.$$

e) Să se demonstreze că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, avem

$$\frac{1}{4(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{4n}\cdot$$

f) Să se arate că limita şirului $(nI_n)_{n\geq 1}$ este egală cu $\frac{1}{4}\cdot$

Varianta 6

Profilul economic, fizică-chimie şi chimie-biologie

SUBIECTUL I

1. Se consideră funcţiile $f,\ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 8x + 1$ şi $g(x) = -x^2 + 4x - 17$.

a) Să se arate că $f(x) - g(x) \geq 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

b) Să se calculeze aria suprafeţei plane limitate de graficele funcţiilor f şi g, şi dreptele de ecuaţii $x = -1$, $x = 0$.

2. Se consideră mulţimea numerelor reale $\mathbb{R}$ pe care se defineşte legea de compoziţie $x \star y = x + y - 10$, pentru orice $x,\ y \in \mathbb{R}$.

a) Să se arate că legea "$\star$" este comutativă.

b) Să se arate că legea "$\star$" este asociativă.

c) Să se arate că $e = 10$ este elementul neutru al legii "$\star$".

d) Să se verifice că pentru orice $x \in \mathbb{R}$ este adevărată relaţia $x \star (-x + 20) = 10$.

3. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră cercul de ecuaţie $(x + 3)^2 + (y + 5)^2 = 169$.

a) Să se determine coordonatele centrului şi raza cercului.

b) Să se verifice că punctul $P(2, 7)$ este situat pe cerc.

c) Să se scrie ecuaţia tangentei la cerc în punctul $P(2, 7)$.

SUBIECTUL II

1. Se consideră polinomul $f = (1 + X + X^2)^{10}$ cu forma sa algebrică $f = a_{20}X^{20} + \ldots + a_1X + a_0$.

a) Să se determine a_0 şi a_1.

b) Să se calculeze $f(1)$, $f(-1)$ şi $f(i)$.

c) Să se calculeze suma coeficienţilor polinomului f.

d) Să se arate că $a_0 + a_4 + \ldots + a_{16} + a_{20} = \dfrac{1}{4}(f(1) + f(-1) + f(i) + f(-i))$.

2. Se consideră funcţiile $f,\ F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a\cos x + b\cos 2x + c\cos 3x$ şi $F(x) = a\sin x + \dfrac{b}{2}\sin 2x + \dfrac{c}{3}\sin 3x$.

a) Să se arate că F este o primitivă a funcţiei f.

b) Să se calculeze $F(k\pi)$, pentru orice $k \in \mathbb{Z}$.

c) Să se calculeze $\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\ dx$.

SUBIECTUL III

1. Să se arate că $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = (y - z)(z - x)(z - y)$.

2. Se consideră a, b, c numere reale distincte două câte două. Se definesc funcţiile $f,\ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x - a)(x - b)(x - c)$ şi $g(x) = x^2 + x + 1$.

a) Să se arate că $f'(a) = (a - b)(a - c)$.

b) Să se demonstreze că $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ g(a) & g(b) & g(c) \end{vmatrix} = (b - a)(c - a)(c - b)$.

c) Să se demonstreze identitatea

$$\frac{g(a)}{f'(a)} + \frac{g(b)}{f'(b)} + \frac{g(c)}{f'(c)} = 1.$$

SUBIECTUL IV

Pentru orice $x \in [0, 1)$ se defineşte suma

$$S_n(x) = \sqrt{1-x} + x\sqrt{1-x} + \ldots + x^{n-1}\sqrt{1-x},\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*.$$

a) Să se arate că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n(x) = \sqrt{1-x} \cdot \dfrac{1-x^n}{1-x}$, $x \in [0, 1)$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)$.

c) Să se calculeze $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x}\; dx$.

Varianta 7

Profilul economic, fizică-chimie şi chimie-biologie

SUBIECTUL I

1. Se consideră polinomul cu coeficienţi reali $f = 2X^3 - 3X^2 - 17X + 30$.

a) Să se calculeze $f(2)$.

b) Să se determine câtul şi restul împărţirii lui f la $X - 2$.

c) Să se rezolve ecuaţia $f(x) = 0$.

2. Să se rezolve ecuaţia $2e^{3x} - 3e^{2x} - 17e^x + 30 = 0$.

3. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(-3,4)$, $B(5,-2)$ şi C mijlocul segmentului $[AB]$.

a) Să se determine coordonatele punctului C şi lungimea segmentului $[AB]$.

b) Să se scrie ecuaţia cercului de diametru $[AB]$.

c) Să se scrie ecuaţia tangentei la cercul de diametru $[AB]$ care trece prin punctul $D(4,5)$.

SUBIECTUL II

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} 3x - 2y + z = 1 \\ x + y + 2z = -2 \\ mx - y + 3z = -1 \end{cases}$, unde m este un parametru real, şi A matricea sistemului.

a) Să se calculeze determinantul matricei A.

b) Să se determine valorile lui m pentru care sistemul este compatibil determinat.

c) Pentru $m = 4$ să se rezolve sistemul.

2. **a)** Să se demonstreze că pentru orice $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 1$, are loc identitatea:

$$x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{x^{n+1} - x}{x - 1}, \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

b) Derivând ambii membri ai identităţii de la punctul a), să se demonstreze că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ şi $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 1$,

$$1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}.$$

SUBIECTUL III

Se consideră mulţimea numerelor reale $\mathbb{R}$ pe care se defineşte legea de compoziţie $x \star y = 2xy - 6x - 6y + 21$, pentru orice x, $y \in \mathbb{R}$.

a) Să se arate că legea "$\star$" este asociativă şi comutativă.

b) Să se determine elementul neutru al legii "$\star$".

c) Să se demonstreze că pentru orice $x \in \mathbb{R}$ are loc identitatea:

$$\underbrace{x \star x \star x \star \ldots \star x}_{\text{de } n \text{ ori } x} = 2^{n-1}(x-3)^n + 3, \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

SUBIECTUL IV

Se consideră funcţiile $f : \mathbb{R}\backslash\{-1;1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 1}$ şi $g : \mathbb{R}\backslash\left\{-\dfrac{1}{3}\right\} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{1}{3x+1}$.

a) Să se demonstreze, utilizând metoda inducţiei matematice, că pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{3}\right\}$,

$$g^{(n)}(x) = (-1)^n n! \frac{3^n}{(3x+1)^{n+1}}.$$

b) Să se determine a, $b \in \mathbb{R}$ cu proprietatea $f(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1}$, $\forall\ x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$.

c) Să se calculeze $\int_2^3 f(x)\ dx$.

Varianta 8

Profilul economic, fizică-chimie şi chimie-biologie

SUBIECTUL I

1. Se consideră polinomul cu coeficienţi reali $f = 2X^3 - X^2 - 5X - 2$.

a) Să se calculeze $f(-1)$.

b) Să se determine câtul şi restul împărţirii lui f la $X + 1$.

c) Să se rezolve ecuaţia $f(x) = 0$.

2. Să se rezolve ecuaţia $2(\ln x)^3 - (\ln x)^2 - 5\ln x - 2 = 0$, $x > 0$.

3. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(-3, 4)$, $B(5, -4)$ şi C mijlocul segmentului $[AB]$.

a) Să se determine coordonatele punctului C şi lungimea segmentului $[AB]$.

b) Să se scrie ecuaţia cercului de diametru $[AB]$.

c) Să se scrie ecuaţia tangentei la cercul de diametru $[AB]$ care trece prin punctul $D(6, \sqrt{7})$.

SUBIECTUL II

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} -x - 2y + 3z = 1 \\ 2x - y - z = 2 \\ mx - 3y + 2z = 3 \end{cases}$, unde m este un parametru real, şi A matricea sistemului.

a) Să se calculeze determinantul matricei A.

b) Să se determine valorile lui m pentru care sistemul este compatibil determinat.

c) Pentru $m = 1$ să se rezolve sistemul.

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (1 + x)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se arate că pentru orice $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^n x^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Derivând cele două expresii ale lui f să se demonstreze că pentru orice $x \in \mathbb{R}$ are loc identitatea

$$n(1 + x)^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 x + 3C_n^3 x^2 + \ldots + nC_n^n x^{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

SUBIECTUL III

a) În mulţimea numerelor complexe $\mathbb{C}$, să se demonstreze că dacă z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$, atunci

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}.$$

Se notează cu $\overline{z}$ conjugatul lui z.

Se consideră $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$, mulţimea matricelor pătratice de ordin doi peste $\mathbb{C}$, şi submulţimea $H = \left\{ A = \begin{pmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{pmatrix} \middle| \, z, w \in \mathbb{C} \right\}$.

b) Să se demonstreze că pentru orice A, $B \in H$, matricea $A + B \in H$.

c) Să se verifice că matricea $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ aparţine mulţimii H.

d) Să se arate că dacă $A \in H$, atunci $-A \in H$.

e) Să se arate că submulţimea H a lui $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$, împreună cu operaţia de adunare indusă, formează o structură de grup comutativ.

f) Să se demonstreze că dacă $A \in H$ şi are determinantul zero, atunci $A = O_2$.

SUBIECTUL IV

Se defineşte şirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ astfel: $I_0 = \int_0^1 \frac{1}{x+2}\,dx$ şi $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+2}\,dx$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

a) Să se calculeze I_0 şi I_1.

b) Să se demonstreze că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, avem $I_{n+1} + 2I_n = \frac{1}{n+1}$.

c) Să se arate că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, avem $I_{n+1} \leq I_n$.

d) Utilizând punctele b) şi c), să se demonstreze că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, au loc inegalităţile:

$$3I_{n+1} \leq \frac{1}{n+1} \leq 3I_n.$$

e) Să se demonstreze că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, avem

$$\frac{1}{3(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{3n}.$$

f) Să se arate că limita şirului $(nI_n)_{n\geq 1}$ este egală cu $\frac{1}{3}$.

Varianta 9

Profilul economic, fizică-chimie şi chimie-biologie

SUBIECTUL I

1. Se consideră polinomul cu coeficienţi reali $f = X^3 - 2X^2 - 5X + 6$.

a) Să se calculeze $f(1)$.

b) Să se determine câtul şi restul împărţirii lui f la $X - 1$.

c) Să se rezolve ecuaţia $f(x) = 0$.

2. Să se rezolve ecuaţia $(\ln x)^3 - 2(\ln x)^2 - 5\ln x + 6 = 0$, $x > 0$.

3. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră dreptele de ecuaţii $d_1 : x + 2y - 6 = 0$, $d_2 : 2x + y - 6 = 0$ şi $d_3 : 3x + 2y - 10 = 0$.

a) Să se determine punctul de intersecţie al dreptelor d_1 şi d_2.

b) Să se arate că dreptele d_1, d_2 şi d_3 sunt concurente.

c) Să se scrie ecuaţia cercului de centru $O(0,0)$ care trece prin punctul de concurenţă al celor trei drepte.

SUBIECTUL II

1. Se consideră polinomul $f = X^3 - X^2 + aX - 1$, $a \in \mathbb{R}$ care are rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$.
Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, definim $S_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n$.

a) Să se arate că $S_3 - S_2 + aS_1 - 3 = 0$.

b) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $S_3 = 1$.

2. Se consideră funcţia $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1 + x5^x)$ şi pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$ se notează $I_k = \displaystyle\int_0^1 \frac{5^k x}{1 + k5^k x}\, dx$.

a) Să se arate calculeze $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{2x}$.

b) Să se calculeze I_k, $k \in \mathbb{N}^*$.

SUBIECTUL III

În $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, mulţimea matricelor pătratice de ordin doi peste $\mathbb{R}$, se consideră matricea $X(a) = \begin{pmatrix} 1+5a & 10a \\ -2a & 1-4a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$.

a) Să se calculeze determinantul matricei $X(a)$.

b) Pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$, să se arate că $X(a) \cdot X(b) = X(ab + a + b)$.

c) Să se determine $(X(1))^2$.

d) Să se demonstreze, utilizând metoda inducţiei matematice, că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(X(1))^n = X(2^n - 1).$$

SUBIECTUL IV

Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x - 1 + \dfrac{x^2}{2}$.

a) Să se determine f' şi f''.

b) Să se arate că $f'(x) > 0$, $\forall\, x > 0$ şi $f'(x) < 0$, $\forall\, x < 0$.

c) Să se demonstreze că pentru orice $x \in \mathbb{R}$, avem $f(x) \geq 0$.

d) Pentru funcţia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \cos x$, să se arate că aria suprafeţei plane limitate de graficul funcţiei g, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x = 0$, $x = 1$, este mai mare decât $\dfrac{5}{6}$.

Varianta 10

Profilul economic, fizică-chimie şi chimie-biologie

SUBIECTUL I

1. Se consideră polinomul cu coeficienţi reali $f = 6X^3 - 5X^2 - 2X + 1$.

a) Să se calculeze $f(1)$.

b) Să se determine câtul şi restul împărţirii lui f la $X - 1$.

c) Să se rezolve ecuaţia $f(x) = 0$.

2. Să se rezolve ecuaţia $6(\ln x)^3 - 5(\ln x)^2 - 2\ln x + 1 = 0$, $x > 0$.

3. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră dreptele de ecuaţii $d_1 : x + 2y + 6 = 0$, $d_2 : 2x + y + 6 = 0$ şi $d_3 : 3x + 2y + 10 = 0$.

a) Să se determine punctul de intersecţie al dreptelor d_1 şi d_2.

b) Să se arate că dreptele d_1, d_2 şi d_3 sunt concurente.

c) Să se scrie ecuaţia cercului de centru $O(0, 0)$ care trece prin punctul de concurenţă al celor trei drepte.

SUBIECTUL II

1. Se consideră mulţimea numerelor reale $\mathbb{R}$ pe care se defineşte legea de compoziţie $x \star y = 3xy - 6x - 6y + 14$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

a) Să se arate că legea ”$\star$” este asociativă şi comutativă.

b) Să se determine elementul neutru al legii ”$\star$”.

c) Să se demonstreze că pentru orice $x \in \mathbb{R}$ are loc identitatea:

$$\underbrace{x \star x \star x \star \ldots \star x}_{\text{de } n \text{ ori } x} = 3^{n-1}(x-2)^n + 2,\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

2. Se consideră funcţia $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x + 1)^2 \ln(x + 1)$.

a) Să se stabilească primitiva funcţiei f, $F : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$, care are proprietatea $F(1) = 0$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{F(x)}{x - 1}$, unde F este primitiva determinată la punctul a).

SUBIECTUL III

În mulţimea matricelor pătratice de ordin trei peste $\mathbb{R}$, se consideră matricele $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Să se determine matricele A^2 şi A^3.

b) Să se arate că pentru orice $z \in \mathbb{C}$ determinantul matricei $I_3 + zA$ este egal cu 1.

c) Să se demonstreze că $I_3 = (I_3 + A)(I_3 - A + A^2)$.

d) Să se arate că matricea $I_3 + A$ este inversabilă şi să se precizeze inversa.

SUBIECTUL IV

Se consideră integralele $I_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1 + x^2}\, dx$ și $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1 + x^2}\, dx$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se calculeze I_0 și I_1.

b) Să se arate că pentru orice $x \in [0, 1]$, $0 \le \dfrac{x^n}{1 + x^2} \le x^n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

c) Să se demonstreze că $0 \le I_n \le \dfrac{1}{n + 1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

d) Să se determine limita șirului $(nI_n)_{n \ge 1}$.

SESIUNEA IUNIE
Varianta 1

Profilurile industrial, agricol, silvic și sportiv - real

SUBIECTUL I

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^5 + bx^2 + c$, unde a, b, c sunt parametri reali. Să se determine a, b şi c astfel încât să fie îndeplinite simultan următoarele condiții: $f(0) = 1$, $f'(1) = 36$, $\int_0^1 f(x)\,dx = 3$.

2. Se consideră mulțimea numerelor reale $\mathbb{R}$ pe care se definește legea de compoziție $x \star y = x + y + 5$, pentru orice x, $y \in \mathbb{R}$.

a) Să se arate că legea "$\star$" este comutativă.

b) Să se arate că legea "$\star$" este asociativă.

c) Să se arate că $e = -5$ este elementul neutru al legii "$\star$".

3. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația $x^2 - x - 2 > -x^2 + 2x + 3$.

4. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(4, 5)$, $B(-2, -3)$ și $C(5, 4)$.

a) Să se calculeze lungimile segmentelor $[AB]$, $[BC]$ şi $[AC]$.

b) Să se arate că triunghiul ABC este dreptunghic.

c) Să se determine coordonatele centrului cercului circumscris triunghiului ABC.

SUBIECTUL II

1. Să se rezolve ecuația $\log_2(9^x + 7) = 2 + \log_2(3^x + 1)$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R}\backslash\{-1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$.

a) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

b) Să se determine $f'(x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$.

c) Să se rezolve ecuația $f'(x) = 0$.

d) Să se stabilească intervalele de monotonie ale funcției f.

SUBIECTUL III

În $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze A^2.

b) Să se determine matricele $X \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, $X = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$, astfel încât determinantul matricei $X + A$ să fie egal cu 2.

c) Să se demonstreze că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = A$.

d) Să se demonstreze că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $A + 2A^2 + \cdots + nA^n = \dfrac{n(n+1)}{2}A$.

SUBIECTUL IV

Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - e^{-x}$.

a) Să se rezolve ecuația $f(x) = 0$.

b) Să se stabilească semnul funcției f.

c) Să se calculeze aria suprafeței limitate de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x = -1$, $x = 2$.

d) Să se determine $f'(x)$ și $f''(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

e) Să se calculeze suma $S = f'(0) + f''(0) + \cdots + f^{(100)}(0)$.

Varianta 2

Profilurile industrial, agricol, silvic și sportiv - real

SUBIECTUL I

1. Se consideră polinomul cu coeficienți reali $f = X^3 + 6X^2 + 11X + 6$.

a) Să se calculeze $f(-1)$.

b) Să se determine câtul și restul împărțirii lui f la $X + 1$.

c) Să se rezolve ecuația $f(x) = 0$.

2. Să se rezolve $C_n^2 = 6$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

3. Se consideră funcția $g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{6x^5 + 3x^2 + 1}{x^4}$. Să se stabilească asimptota oblică spre $+\infty$ la graficul funcției g.

4. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(3, 4)$, $B(-3, -4)$ și $C(3, -4)$.

a) Să se calculeze lungimile segmentelor $[AB]$, $[BC]$ şi $[AC]$.

b) Să se arate că triunghiul ABC este dreptunghic.

c) Să se determine coordonatele centrului cercului circumscris triunghiului ABC.

SUBIECTUL II

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} x - 2y + 3z = -3 \\ 2x + y + z = 4 \\ mx - y + 4z = 1 \end{cases}$, unde m este un parametru real și A matricea sistemului.

a) Să se calculeze determinantul matricei A.

b) Să se determine valorile lui m pentru care sistemul este compatibil determinat.

c) Pentru $m = 3$ să se rezolve sistemul.

2. Se consideră funcția $g : \mathbb{R} \backslash \{1\} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 4x - 1 + \dfrac{1}{1 - x}$.

a) Să se determine g'.

b) Să se stabilească intervalele de monotonie ale funcției g.

c) Să se demonstreze că $g^{(n)}(x) = \dfrac{n!}{(1 - x)^{n+1}}$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

SUBIECTUL III

Se consideră mulțimea numerelor reale $\mathbb{R}$ pe care se definește legea de compoziție $x \star y = 2xy - 6x - 6y + 21$, pentru orice x, $y \in \mathbb{R}$.

a) Să se arate că $x \star y = 2(x - 3)(y - 3) + 21$, pentru orice x, $y \in \mathbb{R}$.

b) Să se arate că legea "$\star$" este asociativă şi comutativă.

c) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\underbrace{x \star x \star \ldots \star x}_{\text{de 10 ori } x} = 3$.

SUBIECTUL IV

Se definește șirul (I_n) astfel: $I_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x + 5}\, dx$ și $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{x + 5}\, dx$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se calculeze I_0 și I_1.

b) Să demonstreze că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $I_{n+1} + 5I_n = \dfrac{1}{n + 1}$.

c) Să se demonstreze că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $I_{n+1} \leq I_n$.

Varianta 3

Profilurile industrial, agricol, silvic și sportiv - real

SUBIECTUL I

1. Se consideră funcțiile $f,\, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4x + 5$ și $g(x) = -x^2 + 8x - 13$.

a) Să se arate că $f(x) - g(x) \geq 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

b) Să se calculeze aria suprafeței plane limitate de graficele funcțiilor f și g, și dreptele de ecuații $x = -1$, $x = 0$.

2. Se consideră mulțimea numerelor reale $\mathbb{R}$ pe care se definește legea de compoziție $x \star y = x + y + 4$, pentru orice $x,\, y \in \mathbb{R}$.

a) Să se arate că legea "$\star$" este asociativă.

b) Să se arate că $e = -4$ este elementul neutru al legii "$\star$".

3. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră cercul de ecuație $(x-6)^2 + (y-3)^2 = 25$.

a) Să se determine coordonatele centrului și raza cercului.

b) Să se verifice că punctul $P(9, 7)$ este situat pe cerc.

c) Să se scrie ecuația tangentei la cerc în punctul $P(9, 7)$.

SUBIECTUL II

1. Se consideră polinomul $f = (X+i)^5 + (X-i)^5$, cu rădăcinile $x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_5 \in \mathbb{C}$.

a) Să se calculeze $f(0)$.

b) Considerând forma algebrică a polinomului $f = a_5X^5 + a_4X^4 + \cdots + a_1X + a_0$, determinați coeficienții a_5, a_4 și a_3.

c) Să se calculeze suma $S = x_1 + x_2 + \cdots + x_5$.

2. Să se calculeze $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2^x - 1}{x}$.

SUBIECTUL III

Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ și $C = A + B$.

a) Să se calculeze determinantul matricei A.

b) Să se demonstreze că $\operatorname{rang}(A+B) = 3$.

c) Să se arate că $A^2 = -6A$ și $B^2 = 6B$.

d) Să se arate că $AB = BA$.

e) Să se demonstreze prin inducție că dacă matricea $X \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ astfel încât $X^2 = tX$, $t \in \mathbb{R}$, atunci pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ avem $X^n = t^{n-1}X$.

f) Să se calculeze matricea C^8.

SUBIECTUL IV

Se consideră funcțiile $f,\, F : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x+1)^2 \ln(x+1)$ și $F(x) = \dfrac{(x+1)^3}{3}\ln(x+1) - \dfrac{(x+1)^3}{9} + \dfrac{1}{9}$.

a) Să se arate că F este o primitivă a funcției f.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{F(x)}{x^2}$.

c) Să se calculeze $\displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx$.

Varianta 4

Profilurile industrial, agricol, silvic și sportiv - real

SUBIECTUL I

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 4x + 1 + m$, unde m este un parametru real.

- **a)** Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât pentru orice $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$.
- **b)** Să se verifice că pentru orice $m \in \mathbb{R}$, avem $f(\sqrt{7} - 2) = f(-\sqrt{7} - 2)$.

2. Se consideră mulțimea numerelor reale $\mathbb{R}$ pe care se definește legea de compoziție $x \star y = x + y - 4$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

- **a)** Să se arate că legea "$\star$" este asociativă.
- **b)** Să se arate că $e = 4$ este elementul neutru al legii "$\star$".

3. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(5, 6)$, $B(-1, -2)$ și $C(6, 5)$.

- **a)** Să se calculeze lungimile segmentelor $[AB]$, $[BC]$ şi $[AC]$.
- **b)** Să se arate că triunghiul ABC este dreptunghic.
- **c)** Să se determine coordonatele centrului cercului circumscris triunghiului ABC.

SUBIECTUL II

1. Se consideră polinomul $f = (X + 1)^5 + (X - 1)^5$, cu rădăcinile $x_1, x_2, \ldots, x_5 \in \mathbb{C}$.

- **a)** Să se calculeze $f(0)$.
- **b)** Considerând forma algebrică a polinomului $f = a_5X^5 + a_4X^4 + \cdots + a_1X + a_0$, determinați coeficienții a_5 și a_4.
- **c)** Să se calculeze suma $S = x_1 + x_2 + \cdots + x_5$.

2. Se consideră funcția $g : \mathbb{R}\backslash\{1\} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 4x - 1 + \dfrac{1}{1 - x}\cdot$

- **a)** Să se determine g'.
- **b)** Să se stabilească semnul funcției g' și să se precizeze intervalele de monotonie ale funcției g.
- **c)** Să se stabilească semnul funcției g.
- **d)** Să se calculeze aria suprafeței plane limitate de graficul funcției g, axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$, $x = \dfrac{3}{4}\cdot$

SUBIECTUL III

În $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

- **a)** Să se calculeze A^2.
- **b)** Să se demonstreze că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = A$.
- **c)** Să se demonstreze că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $A + 2A^2 + \cdots + nA^n = \dfrac{n(n+1)}{2}A$.

SUBIECTUL IV

Se definește șirul (I_n) astfel: $I_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx$ și $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{x+1}\,dx$, $n \in \mathbb{N}^*$.

- **a)** Să se calculeze I_0 și I_1.
- **b)** Să demonstreze că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $I_{n+1} + I_n = \dfrac{1}{n+1}\cdot$
- **c)** Să se demonstreze că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $I_{n+1} \leq I_n$.

Varianta 5

Profilurile industrial, agricol, silvic și sportiv - real

SUBIECTUL I

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+2x+1+m$, unde m este un parametru real.

a) Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât pentru orice $x\in\mathbb{R}$, $f(x)\geq 0$.

b) Să se verifice că pentru orice $m\in\mathbb{R}$, avem $f(\sqrt{5}-1)=f(-\sqrt{5}-1)$.

2. Să se rezolve ecuația $\log_2(9^x+7)=2+\log_2(3^x+1)$.

3. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3\ln x$.

a) Să se determine $f'(x)$ pentru orice $x\in(0,\infty)$.

b) Să se rezolve ecuația $f'(x)=0$, $x\in(0,\infty)$.

4. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră dreptele de ecuaţii $d_1:\ x+2y-3=0$, $d_2:\ 2x+y-3=0$ și $d_3:\ 3x+2y-5=0$.

a) Să se determine punctul de intersecție al dreptelor d_1 și d_2.

b) Să se arate că dreptele d_1, d_2 și d_3 sunt concurente.

c) Să se scrie ecuația cercului de centru $O(0,0)$ care trece prin punctul de concurență al celor trei drepte.

SUBIECTUL II

1. Se consideră polinomul $f=X^3+X^2+aX+1$, $a\in\mathbb{R}$, care are rădăcinile x_1, x_2, $x_3\in\mathbb{C}$.
Pentru $n\in\mathbb{N}^*$, definim $S_n=x_1^n+x_2^n+x_3^n$.

a) Să se arate că $S_3+S_2+aS_1+3=0$.

b) Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât $S_3=-1$.

c) Să se arate că pentru orice $a\in\mathbb{Z}$ număr par, polinomul f nu are rădăcini raționale.

2. Se consideră funcțiile f, $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=a\sin x+b\sin 3x+c\sin 5x$ și $F(x)=-a\cos x-\dfrac{b}{3}\cos 3x-\dfrac{c}{5}\cos 5x$.

a) Să se arate că funcția F este o primitivă a funcției f.

b) Să se calculeze $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$.

SUBIECTUL III

a) În mulțimea numerelor complexe $\mathbb{C}$, să se demonstreze că dacă z_1, $z_2\in\mathbb{C}$, atunci

$$\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}.$$

Se notează cu $\overline{z}$ conjugatul lui z.
Se consideră $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$, mulțimea matricelor pătratice de ordin doi peste $\mathbb{C}$, și submulțimea
$H=\left\{A=\begin{pmatrix} z & -\overline{w}\\ w & \overline{z}\end{pmatrix}\ \middle|\ z,w\in\mathbb{C}\right\}$.

b) Să se demonstreze că pentru orice A, $B\in H$, avem $A+B\in H$.

c) Să se arate că dacă $A\in H$, atunci $-A\in H$.

d) Să se demonstreze că dacă $A\in H$ și are determinantul zero, atunci $A=O_2$.

SUBIECTUL IV

Se definește șirul (I_n) astfel: $I_0=\displaystyle\int_0^1\frac{1}{x+3}\,dx$ și $I_n=\displaystyle\int_0^1\frac{x^n}{x+3}\,dx$, $n\in\mathbb{N}^*$.

a) Să se calculeze I_0 și I_1.

b) Să demonstreze că pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, $I_{n+1}+3I_n=\dfrac{1}{n+1}$.

c) Să se demonstreze că pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, $I_{n+1}\leq I_n$.

Varianta 6

Profilurile industrial, agricol, silvic și sportiv - real

SUBIECTUL I

1. Se consideră funcția $f,\, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 8x + 1$ și $g(x) = -x^2 + 4x - 17$.

a) Să se arate că $f(x) - g(x) \geq 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

b) Să se calculeze aria suprafeței plane limitate de graficele funcțiilor f și g, și dreptele de ecuații $x = -1$, $x = 0$.

2. Se consideră mulțimea numerelor reale $\mathbb{R}$ pe care se definește legea de compoziție $x \star y = x + y - 10$, pentru orice $x,\, y \in \mathbb{R}$.

a) Să se arate că legea "$\star$" este comutativă.

b) Să se arate că legea "$\star$" este asociativă.

c) Să se arate că $e = 10$ este elementul neutru al legii "$\star$".

d) Să se verifice că pentru orice $x \in \mathbb{R}$ este adevărată relația $x \star (-x + 20) = 10$.

3. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră cercul de ecuație $(x - 5)^2 + (y - 4)^2 = 25$.

a) Să se determine coordonatele centrului și raza cercului.

b) Să se verifice că punctul $P(9, 7)$ este situat pe cerc.

c) Să se scrie ecuația tangentei la cerc în punctul $P(9, 7)$.

SUBIECTUL II

1. Se consideră polinomul $f = (1 + X + X^2)^{10}$ cu forma sa algebrică $f = a_{20}X^{20} + \ldots + a_1X + a_0$.

a) Să se determine a_0 şi a_1.

b) Să se calculeze $f(1)$, $f(-1)$ şi $f(i)$.

c) Să se calculeze suma coeficienţilor polinomului f.

d) Să se arate că $a_0 + a_4 + \cdots + a_{16} + a_{20} = \dfrac{1}{4}(f(1) + f(-1) + f(i) + f(-i))$.

2. Se consideră funcţiile $f,\, F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a\cos x + b\cos 2x + c\cos 3x$ şi $F(x) = a\sin x + \dfrac{b}{2}\sin 2x + \dfrac{c}{3}\sin 3x$.

a) Să se arate că F este o primitivă a funcţiei f.

b) Să se calculeze $F(k\pi)$, pentru orice $k \in \mathbb{Z}$.

c) Să se calculeze $\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\, dx$.

SUBIECTUL III

a) În mulţimea numerelor complexe $\mathbb{C}$, să se demonstreze că dacă $z_1,\, z_2 \in \mathbb{C}$, atunci

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}.$$

Se notează cu $\overline{z}$ conjugatul lui z.

Se consideră $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$, mulţimea matricelor pătratice de ordin doi peste $\mathbb{C}$, şi submulţimea

$$H = \left\{ A = \begin{pmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{pmatrix} \,\middle|\, z, w \in \mathbb{C} \right\}.$$

b) Să se demonstreze că pentru orice $A,\, B \in H$, matricea $A + B \in H$.

c) Să se verifice că matricea $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ aparţine mulţimii H.

d) Să se arate că dacă $A \in H$, atunci $-A \in H$.

e) Să se arate că submulţimea H a lui $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$, împreună cu operaţia de adunare indusă, formează o structură de grup comutativ.

f) Să se demonstreze că dacă $A \in H$ şi are determinantul zero, atunci $A = O_2$.

SUBIECTUL IV

Se consideră funcția $g : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{6x^5 + 3x^2 + 1}{x^4}\cdot$

1. Să se arate că dreapta $x = 0$ este asimptotă verticală.

2. Să se stabilească asimptota oblică spre $+\infty$ la graficul funcției g.

Varianta 7

Profilurile industrial, agricol, silvic și sportiv - real

SUBIECTUL I

1. Se consideră polinomul cu coeficienţi reali $f = 2X^3 - 3X^2 - 17X + 30$.

a) Să se calculeze $f(2)$.

b) Să se determine câtul şi restul împărţirii lui f la $X - 2$.

c) Să se rezolve ecuaţia $f(x) = 0$.

2. Să se rezolve ecuaţia $2e^{3x} - 3e^{2x} - 17e^x + 30 = 0$.

3. Se consideră funcția $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^4 - 2x^3 - 17x^2 + 60x - 10$. Să se stabilească semnul funcției g'.

4. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(-3, 4)$, $B(5, -2)$ şi C mijlocul segmentului $[AB]$.

a) Să se determine coordonatele punctului C și lungimea segmentului $[AB]$.

b) Să se scrie ecuația cercului de diametru $[AB]$.

c) Să se verifice dacă punctul $D(4, 5)$ este situat pe cercul de diametru $[AB]$.

SUBIECTUL II

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} 3x - 2y + z = 1 \\ x + y + 2z = -2 \\ mx - y + 3z = -1 \end{cases}$, unde m este un parametru real, şi A matricea sistemului.

a) Să se calculeze determinantul matricei A.

b) Să se determine valorile lui m pentru care sistemul este compatibil determinat.

c) Pentru $m = 4$ să se rezolve sistemul.

2. **a)** Să se demonstreze că pentru orice $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 1$, are loc identitatea:

$$x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{x^{n+1} - x}{x - 1}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

b) Derivând ambii membri ai identităţii de la punctul a), să se demonstreze că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ şi $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 1$,

$$1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}.$$

SUBIECTUL III

Se consideră mulţimea numerelor reale $\mathbb{R}$ pe care se defineşte legea de compoziţie $x \star y = 2xy - 6x - 6y + 21$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

a) Să se arate că legea "$\star$" este asociativă şi comutativă.

b) Să se determine elementul neutru al legii "$\star$".

c) Să se demonstreze că mulţimea $G = (3, \infty)$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea "$\star$".

SUBIECTUL IV

Se consideră integralele $I_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{4 + x^2}\, dx$ şi $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{4 + x^2}\, dx$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se calculeze I_0 şi I_1.

b) Să se arate că pentru orice $x \in [0, 1]$, $\leq \dfrac{x^n}{4 + x^2} \leq x^n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

c) Să se demonstreze că $0 \leq I_n \leq \dfrac{1}{n+1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

d) Să se determine limita şirului $(I_n)_{n \geq 1}$.

Varianta 8

Profilurile industrial, agricol, silvic și sportiv - real

SUBIECTUL I

1. Se consideră polinomul cu coeficienţi reali $f = 2X^3 - X^2 - 5X - 2$.

a) Să se calculeze $f(-1)$.
b) Să se determine câtul şi restul împărţirii lui f la $X + 1$.
c) Să se rezolve ecuaţia $f(x) = 0$.

2. Să se rezolve ecuaţia $2(\ln x)^3 - (\ln x)^2 - 5\ln x - 2 = 0$, $x > 0$.

3. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(-3, 4)$, $B(5, -4)$ şi C mijlocul segmentului $[AB]$.

a) Să se determine coordonatele punctului C și lungimea segmentului $[AB]$.
b) Să se scrie ecuația cercului de diametru $[AB]$.
c) Să se verifice dacă punctul $D(6, \sqrt{7})$ este situat pe cercul de diametru $[AB]$.

SUBIECTUL II

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} -x - 2y + 3z = 1 \\ 2x - y - z = 2 \\ mx - 3y + 2z = 3 \end{cases}$, unde m este un parametru real, şi A matricea sistemului.

a) Să se calculeze determinantul matricei A.
b) Să se determine valorile lui m pentru care sistemul este compatibil determinat.
c) Pentru $m = 1$ să se rezolve sistemul.

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (1 + x)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se arate că pentru orice $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \cdots + C_n^n x^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.
b) Derivând cele două expresii ale lui f să se demonstreze că pentru orice $x \in \mathbb{R}$ are loc identitatea

$$n(1 + x)^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 x + 3C_n^3 x^2 + \cdots + nC_n^n x^{n-1},\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

SUBIECTUL III

Se consideră mulțimea numerelor reale $\mathbb{R}$ pe care se definește legea de compoziție $x \star y = xy + x + y$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

a) Să se calculeze $7 \star 5$.

b) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $x \star x = 0$.

c) Să se arate că $x \star y = y \star x$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

d) Să se determine $e \in \mathbb{R}$ astfel încât $x \star e = x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

e) Să se demonstreze că mulțimea $G = (-1, \infty)$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea "$\star$".

SUBIECTUL IV

Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 3}{x + 1}$.

a) Să se calculeze $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$.

b) Să se determine $f'(x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

c) Să se rezolve ecuația $f'(x) = 0$.

d) Să se arate că $f(x) = \dfrac{1}{x + 1} + x + 2$, $\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

e) Să se calculeze $\displaystyle\int_0^3 f(x)\, dx$.

Varianta 9

Profilurile industrial, agricol, silvic și sportiv - real

SUBIECTUL I

1. Se consideră polinomul cu coeficienţi reali $f = X^3 - 2X^2 - 5X + 6$.

- **a)** Să se calculeze $f(1)$.
- **b)** Să se determine câtul şi restul împărţirii lui f la $X - 1$.
- **c)** Să se rezolve ecuaţia $f(x) = 0$.

2. Să se rezolve ecuaţia $(\ln x)^3 - 2(\ln x)^2 - 5\ln x + 6 = 0$, $x > 0$.

3. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră dreptele de ecuaţii $d_1 : x + 2y - 6 = 0$, $d_2 : 2x + y - 6 = 0$ şi $d_3 : 3x + 2y - 10 = 0$.

- **a)** Să se determine punctul de intersecţie al dreptelor d_1 şi d_2.
- **b)** Să se arate că dreptele d_1, d_2 şi d_3 sunt concurente.
- **c)** Să se scrie ecuaţia cercului de centru $O(0, 0)$ care trece prin punctul de concurenţă al celor trei drepte.

SUBIECTUL II

1. Se consideră polinomul $f = X^3 - X^2 + aX - 1$, $a \in \mathbb{R}$ care are rădăcinile x_1, x_2, $x_3 \in \mathbb{C}$.
Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, definim $S_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n$.

- **a)** Să se arate că $S_3 - S_2 + aS_1 - 3 = 0$.
- **b)** Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $S_3 = 1$.

2. Se consideră funcția $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x(1 + \ln x)$.

- **a)** Să se determine $f'(x)$ pentru orice $x \in (0, \infty)$.
- **b)** Să se calculeze $\displaystyle\int_1^4 f(x)\,dx$.

SUBIECTUL III

În $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, mulţimea matricelor pătratice de ordin doi peste $\mathbb{R}$, se consideră matricea $X(a) = \begin{pmatrix} 1+5a & 10a \\ -2a & 1-4a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$.

- **a)** Să se calculeze determinantul matricei $X(a)$.
- **b)** Pentru orice a, $b \in \mathbb{R}$, să se arate că $X(a) \cdot X(b) = X(ab + a + b)$.
- **c)** Să se determine $(X(1))^2$.
- **d)** Să se demonstreze, utilizând metoda inducţiei matematice, că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(X(1))^n = X(2^n - 1).$$

SUBIECTUL IV

Se consideră funcțiile f, $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x - 1)e^x$ și $F(x) = (x - 2)e^x + e$.

- **a)** Să se arate că funcția F este o primitivă a funcției f.
- **b)** Să se calculeze $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{F(x)}{(x-1)^2}$.
- **c)** Să se calculeze $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{F(x)}{xe^x}$.

Varianta 10

Profilurile industrial, agricol, silvic și sportiv - real

SUBIECTUL I

1. Se consideră polinomul cu coeficienţi reali $f = 6X^3 - 5X^2 - 2X + 1$.

a) Să se calculeze $f(1)$.

b) Să se determine câtul şi restul împărţirii lui f la $X - 1$.

c) Să se rezolve ecuaţia $f(x) = 0$.

2. Să se rezolve ecuaţia $6(\ln x)^3 - 5(\ln x)^2 - 2\ln x + 1 = 0$, $x > 0$.

3. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră dreptele de ecuaţii $d_1 : x + 2y + 6 = 0$, $d_2 : 2x + y + 6 = 0$ şi $d_3 : 3x + 2y + 10 = 0$.

a) Să se determine punctul de intersecţie al dreptelor d_1 şi d_2.

b) Să se arate că dreptele d_1, d_2 şi d_3 sunt concurente.

c) Să se scrie ecuaţia cercului de centru $O(0, 0)$ care trece prin punctul de concurenţă al celor trei drepte.

SUBIECTUL II

1. Se consideră mulţimea numerelor reale $\mathbb{R}$ pe care se defineşte legea de compoziţie $x \star y = 3xy - 6x - 6y + 14$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

a) Să se arate că legea "$\star$" este asociativă şi comutativă.

b) Să se determine elementul neutru al legii "$\star$".

c) Să se demonstreze că pentru orice $x \in \mathbb{R}$ are loc identitatea:

$$\underbrace{x \star x \star x \star \ldots \star x}_{\text{de } n \text{ ori } x} = 3^{n-1}(x-2)^n + 2, \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

2. Se consideră funcţiile $f, F : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x+1)^2 \ln(x+1)$ și $f(x) = \dfrac{(x+1)^3}{3}\ln(x+1) - \dfrac{(x+1)^3}{9} + \dfrac{1}{9}$.

a) Să se calculeze $F(0)$.

b) Să se arate că funcția F este o primitivă a funcției f.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{F(x)}{x^2}$.

SUBIECTUL III

Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ se definește matricea $B_n = A + A^2 + A^3 + \cdots + A^n$.

a) Să se determine A^2 și A^3.

b) Să se demonstreze că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = \begin{pmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c) Să se determine matricea B_n, $n \in \mathbb{N}^*$.

SUBIECTUL IV

Se consideră integralele $I_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{4 - x^2}\, dx$ şi $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{4 - x^2}\, dx$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se calculeze I_0 şi I_1.

b) Să se arate că pentru orice $x \in [0, 1]$, $0 \le \dfrac{x^n}{4 - x^2} \le x^n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

c) Să se demonstreze că $0 \le I_n \le \dfrac{1}{n+1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

SESIUNEA IUNIE
Varianta 1

Profil pedagogic

SUBIECTUL I

1. Să se determine toate numerele scrise în baza 10 de forma $\overline{abbc}$, divizibile cu 45, știind că a este cifră pară.

2. Un elev are o sumă de bani. După ce dublează această sumă, cheltuiește 150000 de lei. Apoi dublează suma rămasă și mai cheltuiește încă 200000 lei. După ce dublează noul rest și cheltuiește încă 250000 lei, constată că i-au rămas 100000 de lei.

a) Care este suma inițială pe care a avut-o elevul?

b) Care este suma pe care a avut-o elevul înainte de a cheltui 250000 de lei?

SUBIECTUL II

1. Se consideră binomul la putere $(x-2y)^8$, x, $y \in \mathbb{R}$.

a) Să se calculeze suma coeficienților dezvoltării binomului.

b) Să se determine termenul din mijloc al dezvoltării.

2. În $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, mulțimea matricelor pătratice de ordinul doi peste $\mathbb{R}$, se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze A^2.

b) Să se determine $X \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, $X = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$ astfel încât determinantul matricei $X + A$ să fie egal cu 2.

c) Să se demonstreze că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = A$.

d) Să se demonstreze că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$,

$$A + 2A^2 + \cdots + nA^n = \frac{n(n+1)}{2}A.$$

SUBIECTUL III

Se consideră mulţimea numerelor reale $\mathbb{R}$ pe care se defineşte legea de compoziţie $x \star y = 3xy - 6x - 6y + 14$, pentru orice x, $y \in \mathbb{R}$.

a) Să se arate că legea "$\star$" este asociativă şi comutativă.

b) Să se determine elementul neutru al legii "$\star$".

c) Să se demonstreze că mulțimea $G = (2, \infty)$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea "$\star$".

d) Să se demonstreze, utilizând metoda inducției matematice, că pentru orice $x \in \mathbb{R}$ are loc identitatea:

$$\underbrace{x \star x \star x \star \ldots \star x}_{\text{de } n \text{ ori } x} = 3^{n-1}(x-2)^n + 2, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

SUBIECTUL IV

Se consideră tetraedrul regulat $ABCD$ de muchie $2\sqrt{3}$ cm.

a) Să se calculeze volumul tetraedrului.

b) Să se demonstreze că dreptele AB și CD sunt perpendiculare.

Varianta 2

Profil pedagogic

SUBIECTUL I

1. Numerele 294, 499 și 361 împărțite la același număr natural n dau resturile 14, 9, respectiv 11. Să se determine numărul natural n.

2. În două magazii se află depozitate porumb și orez.

a) Cantitățile de porumb din cele două magazii sunt direct proporționale cu numerele 7 și 11, iar în prima magazie sunt cu 840 t mai puțin decât în a doua. Care este cantitatea de porumb din a doua magazie?

b) 20% din cantitatea de orez depozitată în prima magazie este egală cu 60% din cantitatea de orez din a doua magazie. După ce se scot 400 t de orez din fiecare magazie, în prima magazie rămâne de 4 ori mai mult orez decât în a doua. Ce cantitate de orez a fost depozitată inițial în fiecare magazie?

SUBIECTUL II

1. Se consideră polinomul cu coeficienți reali $f = X^3 + 2X^2 - 5X - 6$.

a) Să se calculeze $f(-1)$.

b) Să se determine câtul și restul împărțirii lui f la $X + 1$.

c) Să se rezolve ecuația $f(x) = 0$.

2. Se consideră sistemul $\begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ 2x - y + z = 2 \\ mx + y - 2z = 3 \end{cases}$, unde m este un parametru real și A matricea sistemului.

a) Să se calculeze determinantul matricei A.

b) Să se determine valorile lui m pentru care sistemul este compatibil nedeterminat.

SUBIECTUL III

Se consideră mulțimea numerelor reale $\mathbb{R}$ și submulțimea sa

$$G = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z},\ a^2 - 2b^2 = 1\}.$$

a) Să se demonstreze că dacă a, b, c, $d \in \mathbb{Z}$ și $a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2}$, atunci $a = c$ și $b = d$.

b) Să se demonstreze că G este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ față de operația de înmulțire a numerelor reale.

c) Să se arate că dacă $x = a + b\sqrt{2}$ și $x \in G$, atunci $x \neq 0$ și $\dfrac{1}{x} \in G$.

SUBIECTUL IV

Se consideră triunghiul echilateral ABC cu $AB = 3$ cm și dreapta AM perpendiculară pe planul (ABC) astfel încât $AM = \sqrt{6}$ cm. Pe laturile $[AB]$ și $[AC]$ se fixează punctele E și F astfel încât $AE = 2BE$, respectiv $CF = 2AF$.

a) Să se calculeze perimetrul triunghiului AEF.

b) Să se demonstreze că planele (EFM) și (AFM) sunt perpendiculare.

Varianta 3

Profil pedagogic

SUBIECTUL I

1. Să se determine toate numerele naturale scrise în baza 10, de forma $\overline{27xxy}$, divizibile cu 45.

2. Barbu are 57 de ani, vârsta lui Dan este media aritmetică a vârstelor lui Barbu și Ion, iar Ion are 13 ani.

a) Ce vârstă are Dan?

b) Cu câți ani în urmă vârsta lui Barbu a fost de 12 ori mai mare decât vârsta lui Dan?

c) Peste câți ani vârstele lui Barbu, Dan și Ion vor fi direct proporționale cu numerele 7, 5 și respectiv 3?

SUBIECTUL II

1. Să se rezolve ecuațiile:

a) $C_n^3 = 10$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$;

b) $\log_2(x+2) + \log_2 x = 3$, $x \in (0, +\infty)$.

2. Se consideră polinomul $f = X^3 + X^2 + aX + 1$, $a \in \mathbb{R}$.
Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, definim $S_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n$, unde x_1, x_2, $x_3 \in \mathbb{C}$ sunt rădăcinile polinomului f.

a) Să se arate că $S_3 + S_2 + aS_1 + 3 = 0$.

b) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $S_3 = -1$.

SUBIECTUL III

În $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, mulţimea matricelor pătratice de ordin doi peste $\mathbb{R}$, se consideră matricea $X(a) = \begin{pmatrix} 1-a & -2a \\ a & 1+2a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$.

a) Să se calculeze determinantul matricei $X(a)$.

b) Pentru orice a, $b \in \mathbb{R}$, să se arate că $X(a) \cdot X(b) = X(ab + a + b)$.

c) Să se determine $(X(1))^2$.

d) Să se demonstreze, utilizând metoda inducţiei matematice, că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(X(1))^n = X(2^n - 1).$$

SUBIECTUL IV

Se consideră trapezul $ABCD$ cu proprietatea $m(\sphericalangle A) = m(\sphericalangle D) = 90^\circ$, $AB = 4$ cm, $AD = 8$ cm și $DC = 10$ cm. În punctul B se ridică perpendiculara BP pe planul (ABC) astfel încât $BP = 3$ cm.

a) Să se calculeze perimetrul trapezului.

b) Să se calculeze volumul piramidei $PABCD$.

Varianta 4

Profil pedagogic

SUBIECTUL I

1. Să se demonstreze că numărul $10^{2000} + 9998$ este divizibil cu 18.

2. În prima lună prețul unui produs a crescut cu 12%. În a doua lună prețul produsului a scăzut cu 25%. S-a constatat că față de prețul inițial produsul costă cu 100000 lei mai puțin. Care a fost prețul inițial al produsului?

SUBIECTUL II

1. Se consideră polinomul cu coeficienți reali $f = 2X^3 - X^2 - 5X - 2$.

a) Să se arate calculeze $f(2)$.

b) Să se determine câtul și restul împărțirii lui f la $X - 2$.

c) Să se rezolve ecuația $f(x) = 0$.

2. Să se rezolve ecuațiile:

a) $C_n^2 = 6$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$;

b) $2e^{3x} + 5e^{2x} + e^x - 2 = 0$, $x \in \mathbb{R}$.

SUBIECTUL III

În $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, mulţimea matricelor pătratice de ordin doi peste $\mathbb{R}$, se consideră matricea $X(a) = \begin{pmatrix} 1+2a & a \\ -2a & 1-a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$.

a) Să se calculeze determinantul matricei $X(a)$.

b) Pentru orice a, $b \in \mathbb{R}$, să se arate că $X(a) \cdot X(b) = X(ab + a + b)$.

c) Să se determine $(X(1))^2$.

d) Să se demonstreze, utilizând metoda inducţiei matematice, că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(X(1))^n = X(2^n - 1).$$

SUBIECTUL IV

Se consideră $VABCD$ o piramidă în care baza $ABCD$ este romb de latură a cm, $m(\sphericalangle BAD) = m(\sphericalangle BVD) = 60°$, O punctul de intersecție al diagonalelor rombului, iar dreapta VO este perpendiculară pe planul (ABC).

a) Să se calculeze perimetrul triunghiului BCD.

b) Să se calculeze volumul piramidei $VABCD$.

Varianta 5

Profil pedagogic

SUBIECTUL I

1. Să se determine $x \in \mathbb{Z}$, $x \neq -2$, astfel încât fracția $\dfrac{3x-4}{x+2}$ să reprezinte un număr natural.

2. Într-o curte sunt găini și iepuri, în total 35 capete.

a) Numărul total de picioare poate fi 68?

b) Dacă numărul total de picioare este 90, să se determine numărul de iepuri.

c) Dacă numărul de găini este cuprins între 18 și 26, să se determine între ce valori este cuprins numărul total de picioare.

SUBIECTUL II

Se consideră polinomul $f = (X+3)^4 + (X-3)^4$, cu rădăcinile $x_1, x_2, \ldots, x_4 \in \mathbb{C}$.

a) Să se calculeze $f(0)$.

b) Considerând forma algebrică a polinomului $f = a_4X^4 + a_3X^3 + \ldots + a_1X + a_0$, determinaţi coeficienţii a_4, a_3 şi a_2.

c) Să se calculeze suma $S = x_1 + x_2 + \cdots + x_4$.

d) Să se calculeze suma $T = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_4^2$.

SUBIECTUL III

În $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, mulţimea matricelor pătratice de ordin doi peste $\mathbb{R}$, se consideră matricea $X(a) = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ -2a & 1+2a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$.

a) Să se calculeze determinantul matricei $X(a)$.

b) Pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$, să se arate că $X(a) \cdot X(b) = X(ab + a + b)$.

c) Să se determine $(X(1))^2$.

d) Să se demonstreze, utilizând metoda inducţiei matematice, că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(X(1))^n = X(2^n - 1).$$

SUBIECTUL IV

Se consideră $VABCD$ o piramidă patrulateră regulată cu baza $ABCD$, iar O este centrul bazei. Latura bazei este de lungime 6 cm, iar înălțimea piramidei VO este de lungime $6\sqrt{2}$ cm.

a) Să se calculeze aria totală a piramidei.

b) Se fixează punctul P pe VO astfel încât $[PV] \equiv [PA]$. Să se calculeze lungimea segmentului $[PO]$.

Varianta 6

Profil pedagogic

SUBIECTUL I

1. Fie $0, a_1a_2a_3\ldots$ scrierea zecimală a numărului $\frac{1}{7}$. Să se determine a_{2004}.

2. Mergând pe jos 6 ore, călătorind cu autobuzul 3 ore și cu trenul 2 ore un excursionist parcurge 528 km. Viteza cu care merge pe jos este de 14 ori mai mică decât viteza autobuzului și de 20 de ori mai mică decât viteza trenului.

a) Care este viteza cu care merge pe jos excursionistul?

b) Care este distanța pe care o parcurge cu autobuzul?

c) Care este distanța pe care o parcurge cu trenul?

SUBIECTUL II

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} x-2y+3z=-3 \\ 2x+y+z=4 \\ mx-y+4z=1 \end{cases}$, unde m este un parametru real, și A matricea sistemului.

a) Să se calculeze determinantul matricei A.

b) Să se determine valorile lui m pentru care sistemul este compatibil determinat.

c) Pentru $m=3$ să se rezolve sistemul.

2. Să se rezolve ecuațiile:

a) $4^{2x}+7\cdot 4^x-16\cdot 4^{-x}-10=0$, $x\in\mathbb{R}$.

b) $(n-3)!=24$, $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 3$.

SUBIECTUL III

Se consideră mulțimea numerelor reale $\mathbb{R}$ și submulțimea sa

$$G=\{a+b\sqrt{5} \mid a,b\in\mathbb{Z},\ a^2-5b^2=1\}.$$

a) Să se demonstreze că dacă a, b, c, $d\in\mathbb{Z}$ și $a+b\sqrt{5}=c+d\sqrt{5}$, atunci $a=c$ și $b=d$.

b) Să se demonstreze că G este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ față de operația de înmulțire a numerelor reale.

c) Să se arate că dacă $x=a+b\sqrt{5}$ și $x\in G$, atunci $x\neq 0$ și $\frac{1}{x}\in G$.

SUBIECTUL IV

Se consideră paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ în care diagonala AC' este de lungime 13 cm și suma tuturor muchiilor este de 76 cm.

a) Să se calculeze aria totală a paralelipipedului.

b) Dacă lungimile AB, BC și AA' sunt respectiv proporționale cu 6, 8 și 24 să se determine distanța de la B' la AD'.

Varianta 7

Profil pedagogic

SUBIECTUL I

1. Să se determine numerele naturale x și y a căror sumă este 88, iar cel mai mare divizor comun al lor este 11.

2. Într-o curte sunt găini și iepuri, în total 35 de capete.

- **a)** Dacă numărul total de picioare este 90, să se determine numărul de iepuri.
- **b)** După ce au fost aduși 6 iepuri numărul total de picioare este de 104. Să se determine numărul de găini din curte.
- **c)** Dacă numărul de găini este cuprins între 18 și 26, să se determine între ce valori este cuprins numărul total de picioare.

SUBIECTUL II

Se consideră polinomul $f = (X+1)^5 + (X-1)^5$, cu rădăcinile $x_1, x_2, \ldots, x_5 \in \mathbb{C}$.

a) Să se calculeze $f(0)$.

b) Considerând forma algebrică a polinomului $f = a_5X^5 + a_4X^4 + \ldots + a_1X + a_0$, determinați coeficienții a_5, a_4 și a_3.

c) Să se calculeze suma $S = x_1 + x_2 + \cdots + x_5$.

d) Să se calculeze suma $T = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_5^2$.

SUBIECTUL III

În $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, mulţimea matricelor pătratice de ordin doi peste $\mathbb{R}$, se consideră matricea $X(a) = \begin{pmatrix} 1+3a & 6a \\ -a & 1-2a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$.

a) Să se calculeze determinantul matricei $X(a)$.

b) Pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$, să se arate că $X(a) \cdot X(b) = X(ab + a + b)$.

c) Să se determine $(X(1))^2$.

d) Să se demonstreze, utilizând metoda inducției matematice, că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(X(1))^n = X(2^n - 1).$$

SUBIECTUL IV

Se consideră prisma dreaptă $ABCDA'B'C'D'$ în care $ABCD$ este pătrat de latură a, iar muchia laterală AA' este de lungime $2a$. Se notează cu E mijlocul muchiei CC'.

1. Să se calculeze aria totală a prismei.

2. Să se demonstreze că triunghiul $A'EB$ este dreptunghic.

Varianta 8

Profil pedagogic

SUBIECTUL I

1. Să se determine $x \in \mathbb{Z}$, $x \neq -2$, astfel încât fracţia $\dfrac{3x-4}{x+2}$ să reprezinte un număr natural.

2. Un cub omogen are muchia de 2 dm și cântărește 560 g. Din acest cub se tai un cub cu muchia de 1 dm. Cât cântărește acest cub?

3. Să se determine cel mai mic număr natural de trei cifre care împărțit la 3, 4 și 5 să dea de fiecare dată restul 1.

SUBIECTUL II

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} x+3y-2z=1 \\ 3x-y+z=3 \\ mx+2y-z=4 \end{cases}$, unde m este un parametru real, și A matricea sistemului.

a) Să se calculeze determinantul matricei A.

b) Să se determine valorile lui m pentru care sistemul este compatibil determinat.

c) Pentru $m=4$ să se rezolve sistemul.

2. Se consideră polinomul $f = X^3 - 3X^2 + aX - 5$, $a \in \mathbb{R}$.

Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, definim $S_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n$, unde $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$ sunt rădăcinile polinomului f.

a) Să se arate că $S_3 - 3S_2 + aS_1 - 15 = 0$.

b) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $S_3 = -21$.

SUBIECTUL III

Se consideră mulţimea numerelor reale $\mathbb{R}$ pe care se defineşte legea de compoziţie $x \star y = 2xy - 6x - 6y + 21$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

a) Să se arate că legea "$\star$" este asociativă şi comutativă.

b) Să se determine elementul neutru al legii "$\star$".

c) Să se demonstreze că mulțimea $G = (3, \infty)$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea "$\star$".

d) Să se demonstreze, utilizând metoda inducției matematice, că pentru orice $x \in \mathbb{R}$ are loc identitatea:

$$\underbrace{x \star x \star x \star \ldots \star x}_{\text{de } n \text{ ori } x} = 2^{n-1}(x-3)^n + 3, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

SUBIECTUL IV

Se consideră $SABCD$ o piramidă patrulateră regulată cu baza $ABCD$, iar O este centrul bazei. Latura bazei are lungimea egală cu 2 cm, iar muchia laterală are lungimea egală cu $\sqrt{6}$ cm.

a) Să se calculeze volumul piramidei.

b) Să se calculeze aria laterală a piramidei.

Varianta 9

Profil pedagogic

SUBIECTUL I

1. Să se demonstreze că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, numărul $A = 5^{n-1} \cdot 2^n + 5^n \cdot 2^{n-1}$ este divizibil cu 70.

2. La prima ediție a unui cros au participat mai puțin de 1000 de sportivi, la a doua ediție au participat cu 15% mai mulți sportivi decât la prima ediție, iar la a treia ediție au participat cu 8% mai puțini decât la a doua ediție. Câți sportivi au participat la fiecare din cele trei ediții?

SUBIECTUL II

1. Se consideră polinomul cu coeficienți reali $f = 5X^3 + 14X^2 + 7X - 2$.

a) Să se arate calculeze $f(-2)$.

b) Să se determine câtul și restul împărțirii lui f la $X + 2$.

c) Să se rezolve ecuația $f(x) = 0$.

2. Să se rezolve ecuațiile:

a) $e^{3x} - 2e^{2x} - 13e^x - 10 = 0$, $x \in \mathbb{R}$.

b) $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 64$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

SUBIECTUL III

În $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, mulţimea matricelor pătratice de ordin doi peste $\mathbb{R}$, se consideră matricea $X(a) = \begin{pmatrix} 1-3a & 6a \\ -2a & 1+4a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$.

a) Să se calculeze determinantul matricei $X(a)$.

b) Pentru orice a, $b \in \mathbb{R}$, să se arate că $X(a) \cdot X(b) = X(ab + a + b)$.

c) Să se determine $(X(1))^2$.

d) Să se demonstreze, utilizând metoda inducţiei matematice, că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(X(1))^n = X(2^n - 1).$$

SUBIECTUL IV

Se consideră tetraedrul regulat $ABCD$ de muchie 6 cm, O punctul de intersecție al mediatoarelor triunghiului BCD.

a) Să se calculeze volumul tetraedrului $ABCD$.

b) Se fixează punctul H pe segmentul $[AO]$ situat la distanță egală de toate fețele tetraedrului. Să se determine distanța dintre punctele H și A.

Varianta 10

Profil pedagogic

SUBIECTUL I

1. Să se determine cel mai mic număr natural divizibil cu 9, format din cinci cifre distincte.

2. O echipă formată din 6 lucrători are de efectuat o lucrare. Lucrând individual oricare dintre doi angajați ar putea efectua lucrarea în 36 ore, și oricare dintre următorii 4 ar pute efectua lucrarea în 72 ore.

a) În cât timp ar efectua lucrarea primii doi angajați, dacă ar lucra împreună?

b) În cât timp ar efectua lucrarea ultimii patru angajați, dacă ar lucra împreună?

c) În cât timp execută lucrarea întreaga echipă?

SUBIECTUL II

1. Se consideră fracția $\dfrac{x^2+(m+3)x+m+11}{x^2+2x+m+5}$, $m \in \mathbb{R}$.

a) Să se determine m astfel încât fracția să aibă sens pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

b) Să se determine m astfel încât fracția să fie strict pozitivă pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

2. Se consideră sistemul $\begin{cases} 2x+y-3z=2 \\ 3x-2y+z=-1 \\ mx-y-2z=1 \end{cases}$, unde m este un parametru real, și A matricea sistemului.

a) Să se calculeze determinantul matricei A.

b) Să se determine valorile lui m pentru care sistemul este compatibil nedeterminat.

SUBIECTUL III

Se consideră mulțimea numerelor reale $\mathbb{R}$ pe care se definește legea de compoziție $x \star y = xy - 4x - 4y + 20$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

a) Să se calculeze $7 \star 5$.

b) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $x \star x = 20$.

c) Să se arate că $x \star y = y \star x$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

d) Să se determine $e \in \mathbb{R}$ astfel încât $x \star e = x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

e) Să se demonstreze, utilizând metoda inducției matematice, că pentru orice $x \in \mathbb{R}$ are loc identitatea

$$\underbrace{x \star x \star \ldots \star x}_{\text{de } n \text{ ori } x} = (x-4)^n + 4,\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*.$$

SUBIECTUL IV

Se consideră un trunchi de con circular drept în care secțiunea axială este trapezul $ABCD$ în care $AC \perp BD$, $AB = 10$ cm și $CD = 6$ cm.

a) Să se calculeze aria trapezului $ABCD$.

b) Să se calculeze volumul trunchiului de con.

SESIUNEA IUNIE
Varianta 1

Profil uman

SUBIECTUL I

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^5 + bx^2 + c$, a, b, c parametri reali. Să se determine a, b și c astfel încât să fie îndeplinite simultan condițiile

$$f(0) = 1, \quad f'(1) = 36, \quad \int_0^1 f(x)\,dx = 3.$$

2. Se consideră polinomul $g = X^3 + X - 2$.

a) Să se afle câtul și restul împărțirii polinomului la $X - 1$.

b) Să se rezolve în mulțimea numerelor complexe ecuația $g(x) = 0$.

3. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră dreptele de ecuații $d_1 : 3x - y - 2 = 0$, $d_2 : x - y = 0$.

a) Să se determine coordonatele punctului de intersecție al celor două drepte.

b) Să se scrie ecuația dreptei care trece prin punctul $A(1, 1)$ și are panta 2.

SUBIECTUL II

În $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, mulțimea matricelor pătratice de ordin doi peste $\mathbb{R}$, se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze A^2.

b) Să se determine $X \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, $X = \begin{pmatrix} x & 0 \\ x & 0 \end{pmatrix}$, astfel încât determinantul matricei $X + A$ să fie egal cu 2.

c) Să se demonstreze că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = A$.

SUBIECTUL III

Se consideră funcția $f : \mathbb{R}\setminus\{3\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 7}{x - 3}$.

a) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

b) Să se determine $f'(x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}\setminus\{3\}$.

c) Să se arate că $f(x) = \dfrac{4}{x-3} + x - 1$, $\forall\, x \in \mathbb{R}\setminus\{3\}$.

d) Să se calculeze $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$.

SUBIECTUL IV

Se consideră mulțimea numerelor reale $\mathbb{R}$ pe care se definește legea de compoziție $x \star y = 4xy - 4x - 4y + 5$, pentru orice x, $y \in \mathbb{R}$.

a) Să se arate că legea "$\star$" este asociativă și comutativă.

b) Să se determine elementul neutru al legii "$\star$".

c) Să se demonstreze că mulțimea $G = (1, +\infty)$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea "$\star$".

Varianta 2

Profil uman

SUBIECTUL I

1. Se consideră polinomul cu coeficienți reali $f = X^3 + aX^2 + bX + 6$, a, $b \in \mathbb{R}$.

- **a)** Să se determine a și b astfel încât $f(1) = 0$ și $f(-2) + 30 = 0$.
- **b)** Pentru $a = -2$ și $b = -5$ să se afle câtul și restul împărțirii lui f la $X^2 + 1$.
- **c)** Pentru $a = -2$ și $b = -5$ să se rezolve ecuația $f(x) = 0$.

2. Să se rezolve ecuația $4^{2x} - 2 \cdot 4^x + 6 \cdot 4^{-x} - 5 = 0$.

3. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(-3, 3)$, $B(5, -3)$ și C mijlocul segmentului $[AB]$.

- **a)** Să se determine panta dreptei AB.
- **b)** Să se scrie ecuația dreptei care trece prin C și are panta $\frac{4}{3}$.

SUBIECTUL II

Se consideră matricea $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Să se arate că $B^2 = 5B$.

b) Să se demonstreze, utilizând metoda inducției matematice, că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $B^n = 5^{n-1}B$.

c) Să se determine matricea $A = B + B^2 + \cdots + B^{100}$.

SUBIECTUL III

1. Se consideră funcțiile f, $F : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 \ln x$ și $F(x) = \frac{x^4}{4}\left(\ln x - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{16}$.

- **a)** Să se calculeze $F(1)$.
- **b)** Să se arate că funcția F este o primitivă a funcției f.
- **c)** Să se calculeze $\int_1^e f(x)\,dx$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^2}$.
Să se determine $f'(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}^*$.

SUBIECTUL IV

Se consideră mulțimea numerelor reale $\mathbb{R}$ pe care se definește legea de compoziție $x \star y = 2xy - 6x - 6y + 21$, pentru orice x, $y \in \mathbb{R}$.

a) Să se arate că legea "$\star$" este asociativă și comutativă.

b) Să se determine elementul neutru al legii "$\star$".

c) Să se demonstreze că pentru orice $x \in \mathbb{R}$ are loc identitatea

$$\underbrace{x \star x \star \ldots \star x}_{\text{de } n \text{ ori } x} = 2^{n-1}(x - 3)^n + 3, \ \forall\, n \in \mathbb{N}^*.$$

Varianta 3

Profil uman

SUBIECTUL I

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^7 + bx^3 + c$, a, b, c parametri reali. Să se determine a, b și c astfel încât să fie îndeplinite simultan condițiile

$$f(0) = 1, \quad f'(1) = 38, \quad \int_0^1 f(x)\,dx = 3.$$

2. Să se rezolve ecuația $\lg(3x^2 + 12x + 19) - \lg(3x + 4) = 1$, $x \in (0, \infty)$.

3. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(-3, 3)$, $B(5, -3)$ și C mijlocul segmentului $[AB]$.

a) Să se determine coordonatele punctului C și lungimea segmentului $[AB]$.

b) Să se scrie ecuația cercului de diametru $[AB]$.

SUBIECTUL II

Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Să se determine x, y, z, $t \in \mathbb{R}$ astfel încât $A \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Să se determine A^2 și A^3.

c) Să se demonstreze că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

SUBIECTUL III

1. Se consideră funcția $f : (-\infty, 5) - \{2\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 6}{x^2 - 7x + 10}$.

a) Să se calculeze $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$.

b) Să se determine $f'(x)$, $x \in (-\infty, 5) - \{2\}$.

2. Să se calculeze $\displaystyle\int_1^e (x \ln x - x)\,dx$.

SUBIECTUL IV

Se consideră polinomul $f = (X + 1)^5 + (X - 1)^5$, cu rădăcinile $x_1, x_2, \ldots, x_5 \in \mathbb{C}$.

a) Să se calculeze $f(0)$.

b) Considerând forma algebrică a polinomului $f = a_5X^5 + a_4X^4 + \ldots + a_1X + a_0$, determinați coeficienții a_5, a_4 și a_3.

c) Să se calculeze suma $S = x_1 + x_2 + \ldots + x_5$.

d) Să se calculeze suma $T = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_5^2$.

Varianta 4

Profil uman

SUBIECTUL I

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^5 + bx^2 + c$, a, b, c parametri reali. Să se determine a, b și c astfel încât să fie îndeplinite simultan condițiile

$$f(0) = 1, \quad f'(1) = 7, \quad f''(0) = 2.$$

2. Se consideră polinomul $g = 4X^3 + 3X^2 + 1$.

- **a)** Să se calculeze $g(-1)$.
- **b)** Să se afle câtul și restul împărțirii polinomului g la $X^2 - 1$.

3. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră dreptele de ecuații $d_1 : 3x + y + 2 = 0$, $d_2 : x + y = 0$.

- **a)** Să se determine coordonatele punctului de intersecție al celor două drepte.
- **b)** Să se scrie ecuația dreptei care trece prin punctul $A(2, 3)$ și are panta 2.

SUBIECTUL II

În mulțimea matricelor pătratice de ordin doi peste $\mathbb{R}$ se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze A^2.

b) Să se demonstreze că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c) Să se determine matricea $A + A^2 + \cdots + A^{10}$.

SUBIECTUL III

1. Se consideră funcția $g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{8x^7 + 4x^3 + 1}{x^7}$.

- **a)** Să se arate că dreapta $x = 0$ este asimptotă verticală la graficul funcției g.
- **b)** Să se stabilească asimptota spre $+\infty$ la graficul funcției g.

2. Se consideră funcția $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x(1 - \ln x)$.

- **a)** Să se determine $f'(x)$ pentru orice $x \in (0, \infty)$.
- **b)** Să se calculeze $\displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx$.

SUBIECTUL IV

Se consideră mulțimea numerelor reale $\mathbb{R}$ pe care se definește legea de compoziție $x \star y = x + y - 2$, pentru orice x, $y \in \mathbb{R}$.

a) Să se arate că legea "$\star$" este comutativă.

b) Să se arate că legea "$\star$" este asociativă.

c) Să se arate că $e = 2$ este elementul neutru al legii "$\star$".

d) Să se verifice că pentru orice $x \in \mathbb{R}$ este adevărată relația $x \star (-x + 4) = 2$.

e) Să se rezolve ecuația $\underbrace{x \star x \star \ldots \star x}_{\text{de 100 ori } x} = -98$.

Varianta 5

Profil uman

SUBIECTUL I

1. Se consideră polinomul cu coeficienți reali $f = X^3 + mX^2 + nX + 9$, $m, n \in \mathbb{R}$.

- **a)** Să se determine m și n astfel încât $f(1) = 0$ și $f(2) + 21 = 0$.
- **b)** Să se determine câtul și restul împărțirii lui f la $X^2 - 1$.
- **c)** Să se rezolve în mulțimea numerelor complexe ecuația $f(x) = 0$.

2. Să se rezolve ecuația $3^x - 4 + 3 \cdot 3^{-x} = 0$.

3. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(-4, 4)$, $B(4, -2)$ și C mijlocul segmentului $[AB]$.

- **a)** Să se determine coordonatele punctului C.
- **b)** Să se scrie ecuația dreptei care trece prin punctele A și B.

SUBIECTUL II

Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze A^2.

b) Să se determine matricea $B = A + 2A^2 + \cdots + 100A^{100}$.

c) Să se determine $x \in \mathbb{R}$ astfel încât determinantul matricei $A + xI_2$ să fie egal cu zero.

SUBIECTUL III

Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x + 1)e^x$.

a) Să se determine $f'(x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

b) Să se stabilească semnul funcției f'.

c) Să se precizeze intervalele de monotonie ale funcției f și să se arate că $x_0 = -2$ este punct de minim al lui f.

d) Să se calculeze $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$.

SUBIECTUL IV

Se consideră mulțimea numerelor reale $\mathbb{R}$ pe care se definește legea de compoziție $x \star y = xy + 4x + 4y + 12$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

a) Să se calculeze $7 \star (-2)$.

b) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $x \star x = 12$.

c) Să se arate că $x \star \dfrac{-4x - 15}{x + 4} = -3$, $\forall\, x \in \mathbb{R}\backslash\{-4\}$.

d) Să se determine $e \in \mathbb{R}$ astfel încât $x \star e = x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

e) Să se demonstreze că mulțimea $G = (-4, \infty)$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea ”$\star$”

Varianta 6

Profil uman

SUBIECTUL I

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax^3+bx^2+c$, a, b, c parametri reali. Să se determine a, b și c astfel încât să fie îndeplinite simultan condițiile

$$f(0)=1,\quad f'(1)=18,\quad \int_0^1 f(x)\,dx=3.$$

2. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -2 & -1\end{pmatrix}$ și $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

- **a)** Să se calculeze A^2.
- **b)** Să se determine matricea $B=4A^3+3A^2+I_2$.

3. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră dreptele de ecuații $d_1: 3x-8y-3=0$ și $d_2: 5x+2y-5=0$.

- **a)** Să se determine coordonatele punctului de intersecție al celor două drepte.
- **b)** Să se scrie ecuația dreptei care trece prin punctul $A(1,2)$ și are panta 3.

SUBIECTUL II

Se consideră polinomul $f=X^2+X+1$ care are rădăcinile x_1, $x_2\in\mathbb{C}$.

a) Să se calculeze x_1+x_2.

b) Să se arate că $x_1^3=x_2^3=1$.

c) Să se calculeze $x_1^{10}+x_2^{10}$.

SUBIECTUL III

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2e^x$.

- **a)** Să se determine derivata f'.
- **b)** Să se rezolve ecuația $f'(x)=0$.
- **c)** Să se demonstreze că există $c\in(-2,0)$ astfel încât $f''(c)=0$.

2. Se definește șirul (I_n) astfel:

$I_0=\displaystyle\int_0^1\frac{1}{x+1}\,dx$ și $I_n=\displaystyle\int_0^1\frac{x^n}{x+1}\,dx$, $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 1$.

- **a)** Să se calculeze I_0 și I_1.
- **b)** Să se demonstreze că pentru orice $n\in\mathbb{N}$, $I_{n+1}+I_n=\dfrac{1}{n+1}$.

SUBIECTUL IV

În $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, mulţimea matricelor pătratice de ordin doi peste $\mathbb{R}$, se consideră matricea $X(a)=\begin{pmatrix}1+2a & a\\ -2a & 1-a\end{pmatrix}$, $a\in\mathbb{R}$.

a) Pentru orice a, $b\in\mathbb{R}$, să se arate că $X(a)\cdot X(b)=X(ab+a+b)$.

b) Să se demonstreze, utilizând metoda inducţiei matematice, că pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$,

$$(X(1))^n=X(2^n-1).$$

Varianta 7

Profil uman

SUBIECTUL I

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax^4+bx+c$, a, b, c parametri reali. Să se determine a, b și c astfel încât să fie îndeplinite simultan condițiile

$$f(0)=1,\quad f'(1)=22,\quad \int_0^1 f(x)\,dx=3.$$

2. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ -3 & -2\end{pmatrix}$ și $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

- **a)** Să se calculeze A^2.
- **b)** Să se determine matricea $B=5A^4+2A+I_2$.

3. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră dreptele de ecuații $d_1:\ 5x-2y+2=0$ și $d_2:\ 2x+3y-3=0$.

- **a)** Să se determine coordonatele punctului de intersecție al celor două drepte.
- **b)** Să se scrie ecuația dreptei care trece prin punctul $A(2,1)$ și are panta 5.

SUBIECTUL II

Se consideră polinomul $f=X^2-X+1$ care are rădăcinile $x_1,\ x_2\in\mathbb{C}$.

a) Să se calculeze x_1+x_2.

b) Să se arate că $x_1^3=x_2^3=-1$.

c) Să se calculeze $x_1^{10}+x_2^{10}$.

SUBIECTUL III

Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\backslash\{-1,-2\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x+3}{x^2+3x+2}$.

a) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

b) Să se determine $f'(x)$ pentru orice $x\in\mathbb{R}\backslash\{-1,-2\}$.

c) Să se arate că $f(x)=\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x+2}$, $\forall\ x\in\mathbb{R}\backslash\{-1,-2\}$.

d) Să se calculeze $\displaystyle\int_0^3 f(x)\,dx$.

SUBIECTUL IV

În $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, mulţimea matricelor pătratice de ordin doi peste $\mathbb{R}$, se consideră matricea $X(a)=\begin{pmatrix}1-3a & 6a\\ -2a & 1+4a\end{pmatrix}$, $a\in\mathbb{R}$.

a) Să se calculeze determinantul matricei $X(a)$.

b) Pentru orice $a,\ b\in\mathbb{R}$, să se arate că $X(a)\cdot X(b)=X(ab+a+b)$.

c) Să se determine $(X(1))^2$.

d) Să se demonstreze, utilizând metoda inducţiei matematice, că pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$,

$$(X(1))^n=X(2^n-1).$$

Varianta 8

Profil uman

SUBIECTUL I

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^7 + bx^3 + c$, a, b, c parametri reali. Să se determine a, b și c astfel încât să fie îndeplinite simultan condițiile

$$f(0) = 1, \quad f'(1) = 7, \quad f''(1) = 42.$$

2. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze A^2.

b) Să se determine matricea $B = 8A^7 + 4A^3 + I_2$.

3. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră dreptele de ecuații $d_1 : 2x+y-3 = 0$ și $d_2 : 3x+y-4 = 0$.

a) Să se determine coordonatele punctului de intersecție al celor două drepte.

b) Să se scrie ecuația dreptei care trece prin punctul $A(1, 1)$ și are panta 5.

SUBIECTUL II

1. Să se rezolve ecuațiile:

a) $C_n^2 = 10$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

b) $\log_2(x + 2) + \log_2 x = 3$, $x \in (0, \infty)$.

2. Se consideră polinomul $f = X^3 + X^2 + aX + 1$, $a \in \mathbb{R}$. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ definim $S_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n$, unde x_1, x_2, $x_3 \in \mathbb{C}$ sunt rădăcinile polinomului f. Să se arate că $S_3 + S_2 + aS_1 + 3 = 0$.

SUBIECTUL III

Se consideră funcția $g : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{6x^5 + 3x^2 + 1}{x^5}$.

a) Să se arate că dreapta $x = 0$ este asimptotă verticală la graficul funcției g.

b) Să se stabilească asimptota spre $+\infty$ la graficul funcției g.

c) Să se determine derivata g'.

d) Să se calculeze $\displaystyle\int_1^2 g(x)\,dx$.

SUBIECTUL IV

Se consideră mulțimea numerelor reale $\mathbb{R}$ pe care se definește legea de compoziție $x \star y = x + y + 3$, pentru orice x, $y \in \mathbb{R}$.

a) Să se arate că legea ”$\star$” este comutativă.

b) Să se arate că legea ”$\star$” este asociativă.

c) Să se arate că $e = -3$ este elementul neutru al legii ”$\star$”.

d) Să se verifice că pentru orice $x \in \mathbb{R}$ este adevărată relația $x \star (-x - 6) = -3$.

e) Să se rezolve ecuația $\underbrace{x \star x \star \ldots \star x}_{\text{de 100 ori } x} = 397$.

Varianta 9

Profil uman

SUBIECTUL I

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax^5+bx^4+c$, a, b, c parametri reali. Să se determine a, b și c astfel încât să fie îndeplinite simultan condițiile

$$f(0)=-1,\quad f'(1)=50,\quad \int_0^1 f(x)\,dx=1.$$

2. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -2 & -1\end{pmatrix}$ și $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

- **a)** Să se calculeze A^2.
- **b)** Să se determine matricea $B=6A^5+5A^4-I_2$.

3. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră dreptele de ecuații $d_1:\ 2x+3y=0$ și $d_2:\ 5x+8y=0$.

- **a)** Să se determine coordonatele punctului de intersecție al celor două drepte.
- **b)** Să se scrie ecuația dreptei care trece prin punctul $A(1,1)$ și are panta 3.

SUBIECTUL II

Se considerŭ polinomul cu coeficienți reali $f=2X^3-X^2-5X-2$.

- **a)** Să se calculeze $f(2)$.
- **b)** Să se determine câtul și restul împărțirii lui f la $X-2$.
- **c)** Să se rezolve ecuația $f(x)=0$.
- **d)** Să se rezolve ecuația $C_n^2=6$, $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$.

SUBIECTUL III

Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\backslash\{-1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+3x+3}{x+1}$.

- **a)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.
- **b)** Să se determine $f'(x)$ pentru orice $x\in\mathbb{R}\backslash\{-1\}$.
- **c)** Să se rezolve ecuația $f'(x)=0$, $x\in\mathbb{R}\backslash\{-1\}$.
- **d)** Să se arate că $f(x)=\dfrac{1}{x+1}+x+2$, $\forall\ x\in\mathbb{R}\backslash\{-1\}$.
- **e)** Să se calculeze $\displaystyle\int_0^3 g(x)\,dx$.

SUBIECTUL IV

Se consideră mulțimea numerelor reale $\mathbb{R}$ pe care se definește legea de compoziție $x\star y=x+y-4$, pentru orice x, $y\in\mathbb{R}$.

- **a)** Să se arate că legea "$\star$" este comutativă.
- **b)** Să se arate că legea "$\star$" este asociativă.
- **c)** Să se arate că $e=-4$ este elementul neutru al legii "$\star$".
- **d)** Să se verifice că pentru orice $x\in\mathbb{R}$ este adevărată relația $x\star(-x+8)=4$.
- **e)** Să se rezolve ecuația $\underbrace{x\star x\star\ldots\star x}_{\text{de 100 ori } x}=4$.

Varianta 10

Profil uman

SUBIECTUL I

1. Se considerŭ polinomul cu coeficienți reali $f = X^3 - 6X^2 + 11X - 6$.

a) Să se calculeze $f(2)$.

b) Să se determine câtul și restul împărțirii lui f la $X - 1$.

c) Să se rezolve ecuația $f(x) = 0$.

2. Să se rezolve ecuația $3^{2x} - 6 \cdot 3^x - 6 \cdot 3^{-x} = -11$.

3. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră dreptele de ecuații $d_1 : 3x-2y-1 = 0$ și $d_2 : 2x-3y+1 = 0$.

a) Să se determine coordonatele punctului de intersecție al celor două drepte.

b) Să se scrie ecuația dreptei care trece prin punctul $A(1, 1)$ și are panta -3.

SUBIECTUL II

Se consideră matricea $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Să se arate că $B^2 = -2B$.

b) Să se demonstreze, utilizând metoda inducției matematice, că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $B^n = (-2)^{n-1}B$.

c) Să se calculeze determinantul matricei B^n.

SUBIECTUL III

1. Se consideră funcția $g : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{5x^4 + 2x + 1}{x^4}$.

a) Să se arate că dreapta $x = 0$ este asimptotă verticală la graficul funcției g.

b) Să se stabilească asimptota spre $+\infty$ la graficul funcției g.

c) Să se determine derivata $g'(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

2. Se definește șirul (I_n) astfel:

$$I_0 = \int_0^1 \frac{1}{x+10}\,dx \text{ și } I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+10}\,dx,\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 1.$$

a) Să se calculeze I_0 și I_1.

b) Să se demonstreze că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} + 10I_n = \dfrac{1}{n+1}$.

SUBIECTUL IV

Se consideră mulțimea numerelor reale $\mathbb{R}$ pe care se definește legea de compoziție $x \star y = xy - 4x - 4y + 20$, pentru orice x, $y \in \mathbb{R}$.

a) Să se arate că legea "$\star$" este asociativă.

b) Să se arate că $x \star \dfrac{4x-15}{x-4} = 5$, $\forall\, x \in \mathbb{R}\backslash\{4\}$.

c) Să se determine $e \in \mathbb{R}$ astfel încât $x \star e = x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

d) Să se demonstreze, utilizând metoda inducției matematice, că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\underbrace{x \star x \star \ldots \star x}_{\text{de } n \text{ ori } x} = (x-4)^n + 4.$$

SESIUNEA AUGUST
Varianta 1

Profilurile matematică-fizică, informatică și metrologie

SUBIECTUL I

1. **a)** Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, cu a, b, $c \in \mathbb{R}$. Să se determine a, b, c astfel încât $f(0) = 2$, $f'(1) = 1$ și $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2}\cdot$

b) Să se rezolve ecuația $3 \cdot 4^x - 5 \cdot 6^x + 2 \cdot 9^x = 0$, $x \in \mathbb{R}$.

2. Să se determine toate numerele naturale n pentru care $C_n^2 < 10$.

3. Se consideră șirurile $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$ definite prin:

$$a_n = n + 2 \text{ și } b_n = 3n - 2,\ n \in \mathbb{N}^*.$$

a) Să se arate că cele două șiruri sunt progresii aritmetice și să se determine rația fiecăreia.
În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A_n(a_n, b_n)$, $n \geq 1$.

b) Să se scrie ecuația dreptei care trece prin punctele A_1 și A_2.

c) Să se demonstreze că punctele $A_n(a_n, b_n)$ sunt situate pe dreapta A_1A_2, $\forall\, n \geq 1$.

SUBIECTUL II

1. Se consideră polinoamele $f = X^9 + X^8 + \cdots + X + 1$ cu rădăcinile x_1, x_2, $\ldots$, $x_9 \in \mathbb{C}$ și $g = X^2 + X + 1$ cu rădăcinile y_1, $y_2 \in \mathbb{C}$.

a) Să se arate că $y_1^3 = y_2^3 = 1$.

b) Să se arate că polinomul f divide polinomul $X^{10} - 1$.

c) Să se deducă identitatea $x_k^{10} = 1$, $\forall\, k \in \{1, 2, \ldots, 9\}$.

d) Să se calculeze valoarea expresiei

$$A = (x_1 - y_1)(x_2 - y_1)\ldots(x_9 - y_1)(x_1 - y_2)(x_2 - y_2)\ldots(x_9 - y_2).$$

2. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^3 + x^2 + 1}{x^2 + 1}\cdot$

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Să se studieze monotonia funcției f.

c) Să se determine asimptota oblică la ramura către $+\infty$ a graficului funcției f.

SUBIECTUL III

În $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ se consideră mulțimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{Z},\ a^2 - 2b^2 = 1 \right\}$.

a) Să se arate că $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$.

b) Să se demonstreze că G este parte stabilă în raport cu înmulțirea matricelor.

c) Să se arate că dacă $A \in G$, atunci $A^{-1} \in G$.

d) Să se găsească o matrice $A = \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix} \in G$ cu $b \neq 0$.

e) Să se arate că mulțimea G conține o infinitate de elemente.

SUBIECTUL IV

Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 6^x + \alpha^x - 14^x - 15^x$, unde $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$.

a) Să se calculeze $f'(x)$.

b) Să se calculeze $f(0)$ și $f'(0)$.

c) Să se determine α astfel încât $f(x) \geq 0$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$.
Considerăm $\alpha = 35$.

d) Să se calculeze aria cuprinsă între graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = 1$.

e) Să se demonstreze că dacă $0 < a < b < c < d$ și $a + d = b + c$, atunci $a^n + d^n > b^n + c^n$, $\forall\ n \geq 2$.

f) Deduceți că $f^{(n)}(0) > 0$, $\forall\ n \geq 2$.

Varianta 2

Profilurile matematică-fizică, informatică și metrologie

SUBIECTUL I

1. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 6x + 9 + m$, unde m este un parametru real.

- **a)** Să se determine valorile lui m pentru care $f(x) \geq 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.
- **b)** Să se determine punctul de minim și minimul funcției f.
- **c)** Pentru $m = 0$ să se determine valorile reale ale lui x pentru care $(f \circ f)(x) = 0$.

2. Fie polinomul $f = X^3 + X + 1$. Să se determine câtul și restul împărțirii polinomului f la $X + 2$.

3. Se consideră șirurile $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$, unde $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ și $b_n = 9^n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

- **a)** Să se arate că cele două șiruri sunt progresii geometrice și să se determine rația fiecăreia.
  În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A_n(a_n, b_n)$, $n \geq 1$.
- **b)** Să se scrie ecuația dreptei care trece prin punctele A_1 și A_2.
- **c)** Să se demonstreze că punctele $A_n(a_n, b_n)$ sunt situate pe dreapta A_1A_2, $\forall\, n \geq 1$.

SUBIECTUL II

1. Pe mulțimea numerelor reale definim legea $x \star y = -xy + 5x + 5y - 20$.

- **a)** Să se arate că legea este asociativă.
- **b)** Să se arate că $x \star 4 = x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.
- **c)** Să se demonstreze că mulțimea $(-\infty, 5)$ este parte stabilă în raport cu legea ”$\star$”.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{2x}$.

- **a)** Să se demonstreze, utilizând metoda inducției matematice, că $f^{(n)}(x) = 2^n e^{2x}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.
- **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f'(0) + f^{(2)}(0) + \cdots + f^{(n)}(0)}{2^n}$.

SUBIECTUL III

Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 & -2 \\ -3 & -3 & -3 & -3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Definim $B = A + I_4$.

- **a)** Să se calculeze determinantul și rangul matricei A.
- **b)** Să se calculeze A^2.
- **c)** Să se arate că $B^2 = 2B - I_4$.
- **d)** Să se demonstreze că B este inversabilă și să i se calculeze inversa.
- **e)** Să se calculeze B^n, $\forall\, n \geq 1$.

SUBIECTUL IV

Se definește șirul $(I_n)_{n\geq 0}$ astfel:

$$I_0 = \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 6x + 10}\, dx \text{ și } I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^2 + 6x + 10}\, dx,\ n \geq 1.$$

1. Să se calculeze I_0 și I_1.

2. Să se demonstreze că:

a) $I_{n+2} + 6I_{n+1} + 10I_n = \dfrac{1}{n+1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

b) $I_{n+1} \leq I_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

c) $17I_{n+2} \leq \dfrac{1}{n+1} \leq 17I_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

d) $\dfrac{1}{17(n+1)} \leq I_n \leq \dfrac{1}{17(n-1)}$, $\forall\, n \geq 2$.

3. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} n^a I_n$, unde $a \in \mathbb{R}$.

Varianta 3

Profilurile matematică-fizică, informatică și metrologie

SUBIECTUL I

1. Fie polinoamele $f = mX^2 + 2(m+1)X + m$, $m \in \mathbb{R}^*$ și $g = X^2 + X + 1$.

a) Să se determine valorile lui m pentru care f are rădăcini egale.

b) Dacă $y_1, y_2 \in \mathbb{C}$ sunt rădăcinile lui g, să se arate că $y_1^3 = y_2^3 = 1$.

c) Să se arate că f și g au cel puțin o rădăcină comună dacă și numai dacă $m = -2$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \arctan x + \cot^{-1} x$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Deduceți că $\arctan x + \cot^{-1} x = \dfrac{\pi}{2}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

3. În sistemul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,4)$, $B(4,0)$, $C(6,6)$.

a) Să se determine punctul $M(u,v)$ astfel încât $MA = MB = MC$.

b) Să se calculeze lungimea segmentului $[MA]$, unde M este punctul determinat la a).

c) Să sescrie ecuația cercului care trece prin punctele A, B, C.

SUBIECTUL II

1. Fie matricele $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Să se arate că $AB = BA$.

b) Să se demonstreze, utilizând metoda inducției matematice, că $(A+B)^n = A^n + B^n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

c) Să se calculeze $(A+B)^n$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.

2. **a)** Să se arate că $1 - abc = 1 - a + a(1-b) + ab(1-c)$, $\forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos^5 2x}{x^2}$.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos^5 2x \cdot \cos^3 3x \cdot \cos^2 5x}{x^2}$.

SUBIECTUL III

Fie mulțimea de numere reale $M = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Z},\ a^2 - 3b^2 = 1\}$.

a) Să se arate că dacă $a + b\sqrt{3} = c + d\sqrt{3}$, cu $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, atunci $a = c$ și $b = d$.

b) Să se arate că $1 \in M$.

c) Să se demonstreze că M este parte stabilă în raport cu înmulțirea numerelor reale.

d) Să se demonstreze că dacă $z \in M$, atunci $z \neq 0$ și $\dfrac{1}{z} \in M$.

SUBIECTUL IV

1. Să se determine $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{a_1}{x+1} + \frac{a_2}{x+2} + \frac{a_3}{x+3},\ \forall\, x > 0.$$

2. Fie funcțiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{(e^x+1)(e^x+2)(e^x+3)}$ și $g(x) = \dfrac{1}{e^x + a}$, $a > 0$.

a) Să se calculeze $\int g(x)\, dx$.

b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)\, dx$.

Considerăm șirul $(s_n)_{n\geq 1}$ definit prin $s_n = \frac{1}{n}\left[f\left(\frac{1}{2n}\right) + f\left(\frac{3}{2n}\right) + \cdots + f\left(\frac{2n-1}{2n}\right)\right]$.

c) Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} s_n$.

Varianta 1

Profilurile economic, fizică-chimie și chimie-biologie

SUBIECTUL I

1. Fie polinoamele $f = mX^2 + 2(m+1)X + m$, $m \in \mathbb{R}^*$ și $g = X^2 + 3X + 9$.

a) Dacă $y_1, y_2 \in \mathbb{C}$ sunt rădăcinile lui g, să se arate că $y_1^3 = y_2^3 = 27$.

b) Să se arate că f și g nu au nicio rădăcină comună, $\forall\, m \in \mathbb{R}^*$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \arctan x + \cot^{-1} x$.

a) Să se arate că $f'(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Deduceți că $\arctan x + \cot^{-1} x = \frac{\pi}{2}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

3. În sistemul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,4)$, $B(4,0)$, $C(6,6)$.

a) Să se determine punctul $M(u,v)$ astfel încât $MA = MB = MC$.

b) Să se calculeze lungimea segmentului $[MA]$, unde M este punctul determinat la a).

c) Să se scrie ecuația cercului care trece prin punctele A, B, C.

SUBIECTUL II

1. Fie matricele $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Să se arate că $AB = BA$.

b) Să se demonstreze, utilizând metoda inducției matematice, că $(A+B)^n = A^n + B^n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

c) Să se calculeze $(A+B)^{2000}$.

2. **a)** Să se arate că $1 - abc = 1 - a + a(1-b) + ab(1-c)$, $\forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2}$.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos 2x \cdot \cos 3x \cdot \cos 5x}{x^2}$.

SUBIECTUL III

Fie mulțimea de numere reale $M = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Z},\ a^2 - 3b^2 = 1\}$.

a) Să se arate că dacă $a + b\sqrt{3} = c + d\sqrt{3}$, cu $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, atunci $a = c$ și $b = d$.

b) Să se arate că $1 \in M$.

c) Să se demonstreze că M este parte stabilă în raport cu înmulțirea numerelor reale.

d) Să se demonstreze că dacă $z \in M$, atunci $z \neq 0$ și $\frac{1}{z} \in M$.

e) Să se găsească un element $z \in M$, $z = a + b\sqrt{3}$, în care $b \neq 0$.

SUBIECTUL IV

1. Să se determine $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{a_1}{x+1} + \frac{a_2}{x+2} + \frac{a_3}{x+3},\ \forall\, x > 0.$$

2. Fie funcțiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{(e^x+1)(e^x+2)(e^x+3)}$ și $g(x) = \frac{1}{e^x + a}$, $a > 0$.

a) Să se calculeze $\int g(x)\, dx$.

b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)\, dx$.

Varianta 2

Profilurile economic, fizică-chimie și chimie-biologie

SUBIECTUL I

1. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, cu a, b, $c \in \mathbb{R}$. Să se determine a, b, c astfel încât $f(0) = 2$, $f'(1) = 1$ și $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2}\cdot$

2. Să se determine toate numerele naturale n pentru care $C_n^2 = 10$.

3. Se consideră șirurile $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$ definite prin:

$$a_n = n + 2 \text{ și } b_n = 3n - 2,\ n \in \mathbb{N}^*.$$

a) Să se arate că cele două șiruri sunt progresii aritmetice și să se determine rația fiecăreia.
În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A_n(a_n, b_n)$, $n \geq 1$.

b) Să se scrie ecuația dreptei care trece prin punctele A_1 și A_2.

c) Să se demonstreze că punctele $A_n(a_n, b_n)$ sunt situate pe dreapta A_1A_2, $\forall\, n \geq 1$.

SUBIECTUL II

1. Se consideră polinoamele $f = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ cu rădăcinile x_1, x_2, x_3 , $x_4 \in \mathbb{C}$ și $g = X^2 + X + 1$ cu rădăcinile y_1, $y_2 \in \mathbb{C}$.

a) Să se arate că $y_1^3 = y_2^3 = 1$.

b) Să se arate că polinomul f divide polinomul $X^5 - 1$.

c) Să se deducă identitatea $x_k^5 = 1$, $\forall\, k \in \{1, 2, 3, 4\}$.

d) Să se calculeze valoarea expresiei

$$A = (x_1 - y_1)(x_2 - y_1)(x_3 - y_1)(x_4 - y_1)(x_1 - y_2)(x_2 - y_2)(x_3 - y_2)(x_4 - y_2).$$

2. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^3 + x^2 + 1}{x^2 + 1}\cdot$

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Să se studieze monotonia funcției f.

c) Să se determine asimptota oblică la ramura către $+\infty$ a graficului funcției f.

SUBIECTUL III

În $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ se consideră mulțimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{Z},\ a^2 - 2b^2 = 1 \right\}$.

a) Să se arate că $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$.

b) Să se demonstreze că G este parte stabilă în raport cu înmulțirea matricelor.

c) Să se găsească o matrice $A = \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix} \in G$ cu $b \neq 0$.

d) Să se arate că mulțimea G conține o infinitate de elemente.

SUBIECTUL IV

Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 6^x + \alpha^x - 14^x - 15^x$, unde $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$.

a) Să se calculeze $f'(x)$.

b) Să se calculeze $f(0)$ și $f'(0)$.

c) Să se determine α astfel încât $f(x) \geq 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.
Considerăm $\alpha = 35$.

d) Să se calculeze aria cuprinsă între graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = 1$.

Varianta 3

Profilurile economic, fizică-chimie și chimie-biologie

SUBIECTUL I

1. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 6x + 9 + m$, unde m este un parametru real.

a) Să se determine valorile lui m pentru care $f(x) \geq 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

b) Să se determine punctul de minim și minimul funcției f.

2. Fie polinomul $f = X^3 + X + 1$. Să se determine câtul și restul împărțirii polinomului f la $X + 2$.

3. Se consideră șirurile $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$, unde $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ și $b_n = 9^n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se arate că cele două șiruri sunt progresii geometrice și să se determine rația fiecăreia.
În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A_n(a_n, b_n)$, $n \geq 1$.

b) Să se scrie ecuația dreptei care trece prin punctele A_1 și A_2.

c) Să se demonstreze că punctele $A_n(a_n, b_n)$ sunt situate pe dreapta A_1A_2, $\forall\, n \geq 1$.

SUBIECTUL II

1. Pe mulțimea numerelor reale definim legea $x \star y = -xy + 5x + 5y - 20$.

a) Să se arate că legea este asociativă.

b) Să se arate că $x \star 4 = x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

c) Să se demonstreze că mulțimea $(-\infty, 5)$ este parte stabilă în raport cu legea "$\star$".

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x}$.

a) Să se demonstreze, utilizând metoda inducției matematice, că $f^{(n)}(x) = (-1)^n e^{-x}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f^{(2)}(0) + f^{(4)}(0) + \cdots + f^{(2n)}(0)}{n+1}$.

SUBIECTUL III

Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Definim $B = A + I_3$.

a) Să se calculeze determinantul și rangul matricei A.

b) Să se calculeze A^2.

c) Să se arate că $B^2 = 2B - I_3$.

d) Să se demonstreze că B este inversabilă și să i se calculeze inversa.

e) Să se calculeze B^n, $\forall\, n \geq 1$.

SUBIECTUL IV

Se definește șirul $(I_n)_{n\geq 0}$ astfel:

$$I_0 = \int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx \text{ și } I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+1}\,dx,\ n \geq 1.$$

1. Să se calculeze I_0 și I_1.

2. Să se demonstreze că:

a) $I_{n+1} + I_n = \dfrac{1}{n+1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

b) $I_{n+1} \leq I_n, \forall\, n \in \mathbb{N}$.

c) $2I_{n+1} \leq \dfrac{1}{n+1} \leq 2I_n, \forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

d) $\dfrac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \dfrac{1}{2(n-1)}, \forall\, n \geq 2$.

3. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3]{n} I_n$.

Varianta 1

Profilurile industrial, agricol, silvic și sportiv-real

SUBIECTUL I

1. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 6x + 9 + m$, unde m este un parametru real.

a) Să se determine valorile lui m pentru care $f(x) \geq 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

b) Să se determine punctul de minim și minimul funcției f.

2. Fie polinomul $f = X^3 + X + 1$. Să se determine câtul și restul împărțirii polinomului f la $X + 2$.

3. Se consideră șirurile $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$, unde $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ și $b_n = 9^n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se arate că cele două șiruri sunt progresii geometrice și să se determine rația fiecăreia.
În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A_n(a_n, b_n)$, $n \geq 1$.

b) Să se scrie ecuația dreptei care trece prin punctele A_1 și A_2.

c) Să se demonstreze că punctele $A_n(a_n, b_n)$ sunt situate pe dreapta A_1A_2, $\forall\, n \geq 1$.

SUBIECTUL II

1. Pe mulțimea numerelor reale definim legea $x \star y = -xy + 5x + 5y - 20$.

a) Să se arate că legea este asociativă.

b) Să se arate că $x \star 4 = x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

c) Să se demonstreze că mulțimea $(-\infty, 5)$ este parte stabilă în raport cu legea "$\star$".

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x}$.

a) Să se demonstreze, utilizând metoda inducției matematice, că $f^{(n)}(x) = (-1)^n e^{-x}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{f^{(2)}(0) + f^{(4)}(0) + \cdots + f^{(2n)}(0)}{n+1}$.

SUBIECTUL III

Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Definim $B = A + I_2$.

a) Să se calculeze determinantul și rangul matricei A.

b) Să se calculeze A^2.

c) Să se arate că $B^2 = 2B - I_2$.

d) Să se demonstreze că B este inversabilă și să i se calculeze inversa.

e) Să se calculeze B^n, $\forall\, n \geq 1$.

SUBIECTUL IV

Se definește șirul $(I_n)_{n\geq 0}$ astfel:

$$I_0 = \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 6x + 10}\, dx \text{ și } I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^2 + 6x + 10}\, dx,\ n \geq 1.$$

1. Să se calculeze I_0 și I_1.

2. a) Să se demonstreze că $0 \leq \dfrac{x^n}{x^2 + 6x + 10} \leq x^n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\forall\, x \in [0, 1]$.

b) Să se arate că $0 \leq I_n \leq \dfrac{1}{n+1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

c) Să se calculeze $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} I_n$.

Varianta 2

Profilurile industrial, agricol, silvic și sportiv-real

SUBIECTUL I

1. Fie polinoamele $f = mX^2 + 2(m+1)X + m$, $m \in \mathbb{R}^*$ și $g = X^2 + 2X + 4$.

- **a)** Dacă $y_1, y_2 \in \mathbb{C}$ sunt rădăcinile lui g, să se arate că $y_1^3 = y_2^3 = 8$.
- **b)** Să se arate că f și g nu au nicio rădăcină comună, $\forall\, m \in \mathbb{R}^*$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \arctan x + \cot^{-1} x$. Să se calculeze $f''(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

3. În sistemul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,4)$, $B(4,0)$, $C(6,6)$.

- **a)** Să se determine determine coordonatele punctului M, mijlocul segmentului $[AB]$.
- **b)** Să se scrie ecuația dreptei CM.

SUBIECTUL II

1. Fie matricele $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

- **a)** Să se calculeze determinantul și rangul matricei A.
- **b)** Să se arate că $AB = BA$.
- **c)** Să se demonstreze, utilizând metoda inducției matematice, că $(A+B)^n = A^n + B^n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

2. Fie funcția $f : \mathbb{R}\backslash\{-1,-2\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x+2}$.

- **a)** Să se determine asimptota spre $+\infty$ la graficul funcției f.
- **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} (f(1) + f(2) + \cdots + f(n))$.

SUBIECTUL III

Fie mulțimea de numere reale $M = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Z},\ a^2 - 3b^2 = 1\}$.

- **a)** Să se arate că dacă $a + b\sqrt{3} = c + d\sqrt{3}$, cu a, b, c, $d \in \mathbb{Z}$, atunci $a = c$ și $b = d$.
- **b)** Să se arate că $1 \in M$.
- **c)** Să se demonstreze că M este parte stabilă în raport cu înmulțirea numerelor reale.
- **d)** Să se demonstreze că dacă $z \in M$, atunci $z \neq 0$ și $\dfrac{1}{z} \in M$.

SUBIECTUL IV

1. Să se determine a_1, $a_2 \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{a_1}{x+1} + \frac{a_2}{x+2},\ \forall\, x > 0.$$

2. Fie funcțiile f, g, $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{e^x + a}$ cu $a > 0$, $g(x) = \dfrac{1}{(e^x+1)(e^x+2)}$ și $F(x) = \dfrac{1}{a}(x - \ln(e^x + a))$.

- **a)** Să se arate că $F'(x) = f(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.
- **b)** Să se calculeze $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,dx$.

Varianta 3

Profilurile industrial, agricol, silvic și sportiv-real

SUBIECTUL I

1. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, cu a, b, $c \in \mathbb{R}$. Să se determine a, b, c astfel încât $f(0) = 2$, $f'(1) = 1$ și $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2}$.

2. Să se rezolve ecuația $C_n^2 = 10$, $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$.

3. Se consideră șirurile $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$ definite prin:

$$a_n = n + 2 \text{ și } b_n = 3n - 2,\ n \in \mathbb{N}^*.$$

a) Să se arate că cele două șiruri sunt progresii aritmetice și să se determine rația fiecăreia.
În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A_n(a_n, b_n)$, $n \geq 1$.

b) Să se scrie ecuația dreptei care trece prin punctele A_1 și A_2.

c) Să se demonstreze că punctele $A_n(a_n, b_n)$ sunt situate pe dreapta A_1A_2, $\forall\, n \geq 1$.

SUBIECTUL II

1. Se consideră polinoamele $f = X^3 + X^2 + X + 1$ cu rădăcinile x_1, x_2, $x_3 \in \mathbb{C}$ și $g = X^2 + 3X + 9$ cu rădăcinile y_1, $y_2 \in \mathbb{C}$.

a) Să se arate că $y_1^3 = y_2^3 = 27$.

b) Să se determine x_1, x_2, x_3.

d) Să se calculeze

$$A = (x_1 - y_1)(x_1 - y_2)(x_2 - y_1)(x_2 - y_2)(x_3 - y_1)(x_3 - y_2).$$

2. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Să se studieze monotonia funcției f.

c) Să se determine asimptota spre $+\infty$ la graficului funcției f.

SUBIECTUL III

În $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ se consideră mulțimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix} \middle|\ a, b \in \mathbb{Z},\ a^2 - 2b^2 = 1 \right\}$.

a) Să se arate că $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$.

b) Să se demonstreze că G este parte stabilă în raport cu înmulțirea matricelor.

c) Să se găsească o matrice $A = \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix} \in G$ cu $b \neq 0$.

SUBIECTUL IV

Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 6^x + 35^x - 14^x - 15^x$.

a) Să se demonstreze că $f(x) \geq 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

b) Să se calculeze aria cuprinsă între graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = 1$.

c) Să se demonstreze, utilizând metoda inducției matematice, că

$$f^{(n)}(x) = (\ln 6)^n \cdot 6^x + (\ln 35)^n \cdot 35^x - (\ln 14)^n \cdot 14^x - (\ln 15)^n \cdot 15^x,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Varianta 1

Profil pedagogic

SUBIECTUL I

1. Să se determine cel mai mare număr natural de trei cifre care împărțit la 5, 7, 9 să dea de fiecare dată restul 3.

2. **a)** Suma a cinci numere naturale consecutive este 145. Să se determine numerele.

b) Suma a x numere naturale consecutive este $7x + 14$, $x \geq 2$. Să se determine numerele.

SUBIECTUL II

1. Se consideră polinomul $f = X^3 + aX^2 + bX - 5$, cu a, $b \in \mathbb{R}$.

a) Să se determine a și b astfel încât $X - 5$ divide f și $f(1) + 8 = 0$.

b) Pentru $a = -5$ și $b = 1$ să se rezolve ecuația $f(x) = 0$.

2. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Să se arate că $AB = BA$.

b) Să se demonstreze, utilizând metoda inducției matematice, că $(A + B)^n = A^n + B^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

SUBIECTUL III

Pe mulțimea numerelor reale definim legea $x \star y = -xy + 5x + 5y - 20$.

a) Să se arate că legea este asociativă.

b) Să se arate că $x \star 4 = x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

c) Să se demonstreze că mulțimea $(-\infty, 5)$ este parte stabilă în raport cu legea "$\star$".

d) Să se rezolve ecuația $\underbrace{x \star x \star \ldots \star x}_{\text{de 10 ori } x} = 5$.

SUBIECTUL IV

Se consideră un tetraedru regulat de muchie a.

a) Să se calculeze aria totală a tetraedrului.

b) Să se calculeze cosinusul unghiului format de două fețe ale tetraedrului.

c) Să se demonstreze că suma distanțelor de la un punct interior tetraedrului la cele patru fețe ale lui este constantă.

Varianta 2

Profil pedagogic

SUBIECTUL I

1. Suma a două numere naturale a și b este 40, iar cel mai mare divizor comun al lor este 5. Să se determine cele două numere, știind că $a \leq b \leq 2a$.

2. Numărul 1000 se micșorează cu 20%. Cu ce procent trebuie mărit numărul rezultat pentru a se obține din nou 1000?

3. Scrierea zecimală a numărului $\dfrac{1}{13}$ este $0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$. Să se determine a_{2000}.

SUBIECTUL II

1. Să se rezolve ecuația $\log_2 x + \log_3 x + \log_5 x = 0$, $x > 0$.

2. Se consideră polinoamele $f = (X+1)^6 + (X-1)^6$ și $g = 2(X^3 + 15X^2 + 15X + 1)$.

- **a)** Să se arate că $f(X) = g(X^2)$.
- **b)** Să se calculeze $g(-1)$.
- **c)** Să se rezolve ecuația $g(x) = 0$.
- **d)** Să se determine rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL III

În $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ se consideră mulțimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{Z},\ a^2 - 2b^2 = 1 \right\}$.

a) Să se arate că $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$.

b) Să se demonstreze că G este parte stabilă în raport cu înmulțirea matricelor.

c) Să se găsească o matrice $A = \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix} \in G$ cu $b \neq 0$.

d) Să se arate că mulțimea G conține o infinitate de elemente.

SUBIECTUL IV

Secțiunea axială a unui con circular drept este un triunghi isoscel VAB cu $m(\sphericalangle AVB) = 120°$ și $VA = VB = 6$ cm.

a) Să se calculeze raza conului.

b) Să se calculeze volumul conului.

c) Fie M și N două puncte situate pe $[AV]$ astfel încât $VM = MN = NA = 2$ cm și două plane paralele cu baza conului duse prin M și N. Calculați raportul volumelor trunchiurilor de con care au generatoarele egale cu MN, respectiv NA.

Varianta 3

Profil pedagogic

SUBIECTUL I

1. Numerele naturale a, b și c sunt direct proporționale cu 2, 3 și respectiv 6, iar produsul lor este egal cu 4500. Să se afle numerele.

2. Cinci cărți și trei caiete costă 245000 lei, iar trei cărți și cinci caiete costă 195000 lei.

- **a)** Cât costă un caiet și cât costă o carte?
- **b)** Câte cărți și câte caiete se pot cumpăra cu 250000 lei, dacă se cumpără în total 10 bucăți?

SUBIECTUL II

1. Se consideră polinomul $g = X^6 + X^2 + 1$.

- **a)** Să se calculeze $(g(i))^n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.
- **b)** Să se afle câtul și restul împărțirii lui g la $X^2 - 2$.

2. În $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ și $X = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$.

- **a)** Să se determine $x \in \mathbb{R}$ astfel încât determinantul matricei $A + X$ să fie egal cu 15.
- **b)** Să se demonstreze, utilizând metoda inducției matematice, că $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.
- **c)** Să se calculeze $A + A^2 + \cdots + A^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

SUBIECTUL III

Pe mulțimea numerelor reale definim legea $x \star y = x + y - 3$.

- **a)** Să se arate că legea ”$\star$” este comutativă.
- **b)** Să se arate că legea ”$\star$” este asociativă.
- **c)** Să se arate că $x \star (6 - x) = 3$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.
- **d)** Să se rezolve ecuația $\underbrace{x \star x \star \ldots \star x}_{\text{de 40 ori } x} = 3$.

SUBIECTUL IV

Un trunchi de piramidă patrulateră are laturile bazelor de lungimi egale cu 6 cm, respectiv 10 cm și volumul egal cu 196 cm^3. Să se calculeze:

- **a)** înălțimea trunchiului de piramidă;
- **b)** aria laterală a trunchiului de piramidă;
- **c)** sinusul unghiului format de planele a două fețe laterale opuse.

Varianta 1

Profil uman

SUBIECTUL I

1. Se consideră polinomul $f = X^3 + aX^2 + bX - 5$, cu $a, b \in \mathbb{R}$.

a) Să se determine a și b astfel încât $X - 5$ divide f și $f(1) + 8 = 0$.

b) Pentru $a = -5$ și $b = 1$ să se afle câtul și restul împărțirii lui f la $X^2 + 2$.

c) Pentru $a = -5$ și $b = 1$ să se rezolve ecuația $f(x) = 0$.

2. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x}$. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

b) $f(0) + f'(0) + f''(0)$.

3. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră dreptele de ecuaţii $d_1 : 5x - y - 8 = 0$, $d_2 : 3x + 2y - 10 = 0$ şi $d_3 : x - 5y + 8 = 0$.

a) Să se determine punctul de intersecţie al dreptelor d_1 şi d_2.

b) Să se arate că dreapta d_3 trece prin punctul de intersecție al dreptelor d_1 şi d_2.

SUBIECTUL II

Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Să se arate că $AB = BA$.

b) Să se demonstreze, utilizând metoda inducției matematice, că $(A + B)^n = A^n + B^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

SUBIECTUL III

Fie funcția $f : \mathbb{R}\backslash\{-3; 2\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{3x + 4}{x^2 + x - 6}$.

a) Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x) = \dfrac{a}{x + 3} + \dfrac{b}{x - 2}$, $x \in \mathbb{R}\backslash\{-3; 2\}$.

b) Să se calculeze $\displaystyle\int f(x)\,dx$, $x \in (2, \infty)$.

c) Să se determine asimptota spre $+\infty$ la graficul funcției f.

SUBIECTUL IV

Pe mulțimea numerelor reale definim legea de compoziție $x \star y = -xy + 5x + 5y - 20$.

b) Să se arate că legea ”$\star$” este asociativă.

c) Să se arate că $x \star 4 = x$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$.

d) Să se rezolve ecuația $x \star x \star x \star x = 5$.

Varianta 2

Profil uman

SUBIECTUL I

1. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax^2+bx+c$, cu a, b, $c\in\mathbb{R}$. Să se determine a, b, c astfel încât $f(0)=1$, $f'(1)=2$ și $\int_0^1 f(x)\,dx=0$.

2. Să se rezolve ecuația $\log_2 x+\log_3 x+\log_5 x=0$, $x>0$.

3. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră dreptele de ecuaţii $d_1:\ 5x-3y-2=0$, $d_2:\ -3x+4y-1=0$.

a) Să se determine punctul de intersecţie al dreptelor d_1 şi d_2.

b) Să se scrie ecuația dreptei de pantă 2, care trece prin punctul de intersecţie al dreptelor d_1 şi d_2.

SUBIECTUL II

Se consideră polinoamele $f=(X+1)^6+(X-1)^6$ și $g=X^4+14X^2+1)$.

a) Să se arate că polinomul f se divide prin polinomul g.

b) Să se rezolve ecuația $g(x)=0$.

c) Să se determine rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL III

Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{-x}$.

a) Să se arate că $f'(x)+f''(x)=0$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}[f(1)+f(2)+\cdots+f(n)]$.

c) Să se calculeze $\int_0^1 xf(x)\,dx$.

SUBIECTUL IV

În $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ se consideră mulțimea $G=\left\{\begin{pmatrix}a & 2b\\ b & a\end{pmatrix}\ \middle|\ a,b\in\mathbb{Z},\ a^2-2b^2=1\right\}$.

a) Să se arate că $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\in G$.

b) Să se arate că dacă A, $B\in G$, atunci $A\cdot B\in G$.

c) Să se găsească o matrice $A=\begin{pmatrix}a & 2b\\ b & a\end{pmatrix}\in G$ cu $b\neq 0$.

d) Să se arate că mulțimea G conține o infinitate de elemente.

Varianta 3

Profil uman

SUBIECTUL I

1. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax^4+bx^2+c$, cu $a,\ b,\ c\in\mathbb{R}$. Să se determine $a,\ b,\ c$ astfel încât $f(0)=1$, $f'(1)=6$ și $f''(2)=52$.

2. Se consideră polinomul $g=X^6+X^2+1$.

a) Să se calculeze $(g(i))^n$, $\forall\ n\in\mathbb{N}^*$.

b) Să se afle câtul și restul împărțirii lui g la X^2-2.

3. În sistemul cartezian xOy se consideră punctele $A(-3,3)$, $B(5,1)$, $C(-4,4)$.

a) Să se determine determine coordonatele punctului M, mijlocul segmentului $[AB]$.

b) Să se scrie ecuația dreptei CM.

SUBIECTUL II

În $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&3\end{pmatrix}$ și $X=\begin{pmatrix}x&0\\0&x\end{pmatrix}$.

a) Să se determine $x\in\mathbb{R}$ astfel încât determinantul matricei $A+X$ să fie egal cu 15.

b) Să se demonstreze, utilizând metoda inducției matematice, că $A^n=\begin{pmatrix}1&0\\0&3^n\end{pmatrix}$, $\forall\ n\in\mathbb{N}^*$.

c) Să se calculeze $A+A^2+\cdots+A^n$, $n\in\mathbb{N}^*$.

SUBIECTUL III

Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+2x+1$.

a) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x^2}$.

b) Să se calculeze cuprinsă între graficul funcției f și dreapta $y=4$.

c) Să se determine $a\in(-3,1)$ astfel încât dreapta $x=a$ să despartă suprafața de la punctul anterior în două regiuni care au arii egale.

SUBIECTUL IV

Pe mulțimea numerelor reale definim legea $x\star y=x+y-3$.

a) Să se arate că legea ”$\star$” este comutativă.

b) Să se arate că legea ”$\star$” este asociativă.

c) Să se arate că $x\star(6-x)=3$, $\forall\ x\in\mathbb{R}$.

d) Să se rezolve ecuația $\underbrace{x\star x\star\ldots\star x}_{\text{de 40 ori } x}=3$.