

**Olimpiada Națională de Matematică**  
**Etapa finală, Iași, 6 aprilie 2010**

**SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE**

**Soluție.** Inegalitatea se scrie echivalent  $a^2 + b^2 + c^2 - a - b - c \leq (a + b + c)^2 - 9(a + b + c) + 24$ , ..... **2 puncte**  
adică  $0 \leq 2(ab + bc + ca) - 8(a + b + c) + 24$  sau  $0 \leq (ab + bc + ca) - 4(a + b + c) + 12$ .  
..... **2 puncte**

Cum  $(ab - 2a - 2b + 4) = (a - 2)(b - 2)$ , ..... **1 punct**  
grupând convenabil găsim  $(ab - 2a - 2b + 4) + (bc - 2b - 2c + 4) + (ca - 2c - 2a + 4) = (a - 2)(b - 2) + (b - 2)(c - 2) + (c - 2)(a - 2) \geq 0$ , deoarece  $a, b, c \geq 2$ . ..... **2 puncte**

**Soluție.** Din  $a + b = c + d$  rezultă  $(a + b)^2 = (c + d)^2$ , deci  $ab = cd$ . ..... **1 punct**

Deducem că  $a^2 - 2ab + b^2 = c^2 - 2cd + d^2$ , adică  $(a - b)^2 = (c - d)^2$ , deci  $|a - b| = |c - d|$ . ..... **1 punct**

Obținem  $a - b = c - d$  sau  $a - b = d - c$ . Cum  $a + b = c + d$ , prin adunare rezultă  $a = c$ ,  $b = d$  sau  $a = d$ ,  $b = c$ . ..... **1 punct**

Rezultă că numerele sunt de forma  $\overline{aaaa}$ ,  $\overline{abba}$  sau  $\overline{abab}$ , cu  $a \neq 0$  și  $a \neq b$ . ..... **2 puncte**

Obținem  $9 + 9 \cdot 9 + 9 \cdot 9 = 9 + 81 + 81 = 171$  numere. .... **2 puncte**

**Soluție.** Deoarece  $MV = MB = MD$  și  $MO \perp (VBD)$ , rezultă că  $O$  este centrul cercului circumscris triunghiului  $VBD$ . ..... **1 punct**

Rezultă că triunghiul  $VBD$  este dreptunghic isoscel, deci fețele laterale ale piramidei sunt triunghiuri echilaterale. .... **2 puncte**

Notăm  $P$  mijlocul muchiei  $VB$ . Atunci unghiul dintre planele  $(VAB)$  și  $(VBM)$  este  $\sphericalangle APM$ , deci  $\sphericalangle APM = 90^\circ$ . ..... **1 punct**

Triunghiurile  $MPA$  și  $POA$  sunt asemenea, deci  $\frac{MA}{PA} = \frac{PA}{OA}$ . **2 puncte**

De aici  $AM = \frac{PA^2}{OA} = \frac{3}{4}AC$ , ceea ce trebuia demonstrat. .... **1 punct**

**Soluție.** Avem  $(a + c)(b + c) = ab + ac + bc + c^2 = (a + b + c + d)c + ab - cd = pc + ab - cd$ . ..... **3 puncte**

Dacă  $p$  divide  $ab - cd$ , atunci  $p$  divide  $a + c$  sau  $b + c$ . .... **2 puncte**

Însă  $0 < a + c < p$  și  $0 < b + c < p$ , contradicție. .... **2 puncte**