

$$\begin{aligned}
 1. \quad & \frac{x^{10} - a^{10}}{x^2 - a^2} - \frac{x^{12} + a^{12}}{x^4 + a^4} = \frac{x^{14} + a^4 x^{10} - a^{10} x^4 - a^{14} - x^{14} + a^2 x^{12} - a^{12} x^2 + a^{14}}{(x^2 - a^2)(x^4 + a^4)} = & 2p \\
 & = \frac{a^4 x^{10} - a^{10} x^4 + a^2 x^{12} - a^{12} x^2}{(x^2 - a^2)(x^4 + a^4)} = \frac{a^2 x^2 (a^2 x^8 - a^8 x^2 + x^{10} - a^{10})}{(x^2 - a^2)(x^4 + a^4)} = & 2p \\
 & = \frac{a^2 x^2 [x^8 (a^2 + x^2) - a^8 (a^2 + x^2)]}{(x^2 - a^2)(x^4 + a^4)} = \frac{a^2 x^2 (a^2 + x^2)(x^8 - a^8)}{(x^2 - a^2)(x^4 + a^4)} = & 2p \\
 & = \frac{a^2 x^2 (a^2 + x^2)(x^4 - a^4)(x^4 + a^4)}{(x^2 - a^2)(x^4 + a^4)} = \frac{a^2 x^2 (a^2 + x^2)(x^2 - a^2)(x^2 + a^2)}{x^2 - a^2} = & 2p \\
 & = a^2 x^2 (a^2 + x^2)^2 & 1p \\
 \text{Expresia devine} \quad & \frac{a^2 x^2 (x^2 + a^2)^2}{x^2 (x^2 + a^2)^2} = a^2 & 1p
 \end{aligned}$$

2. Fie funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = ax + b$ 1p

Notăm A ; B punctele de intersecție a graficului cu axele Ox ; Oy 0,5p

$$A\left(-\frac{b}{a}; 0\right) \Rightarrow OA = \left| -\frac{b}{a} \right|$$

$$\frac{OA \cdot OB}{2} = 4 \Rightarrow OA \cdot OB = 8 \Rightarrow \left| -\frac{b}{a} \right| \cdot |b| = 8 \Rightarrow \left| -\frac{b^2}{a} \right| = 8$$

$$b^2 = 8|a| \Rightarrow |a| = \frac{b^2}{8} \quad (1) \quad 1p$$

$$M(1; 2) \in G_f \Rightarrow f(1) = 2 \Rightarrow a + b = 2 \quad (2) \quad 1p$$

Cazul I $a < 0$

$$-\frac{b^2}{8} + b = 2 \Rightarrow b^2 - 8b + 16 = 0 \Rightarrow (b - 4)^2 = 0 \Rightarrow b = 4 \quad 0,5p$$

Înlocuind în (2) se obține $a = -2 \Rightarrow f(x) = -2x + 4$ 1p

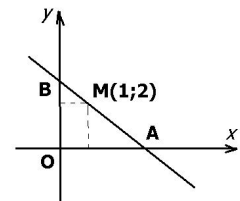
Cazul I $a > 0$

$$\frac{b^2}{8} + b = 2 \Rightarrow b^2 + 8b - 16 = 0 \quad 0,5p$$

Ecuția are soluțiile $b_1 = -4 + 4\sqrt{2}$; $b_2 = -4 - 4\sqrt{2}$ 0,5p

Înlocuind în (2) se obține $a_1 = 6 - 4\sqrt{2}$; $a_2 = 6 + 4\sqrt{2}$ 1p

De aici se obțin funcțiile $f(x) = (6 - 4\sqrt{2})x - 4 + 4\sqrt{2}$ și $f(x) = (6 + 4\sqrt{2})x - 4 - 4\sqrt{2}$ 1p



3. Notăm a muchia tetraedrului regulat ABCD 1p

Fie punctul P aflat la distanța r de toate fețele 2p

Exprimând r în funcție de a se obține $r = \frac{a\sqrt{6}}{12}$ 3p

De unde $a = 2r\sqrt{6}$ 2p

Aria totală va fi $A_t = 4 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 24r^2\sqrt{3}$ 2p

