CLASA A VIII-A

1. Notăm suma din paranteză cu $k \in \mathbb{Z}$.

prin calcul se obţine: $2(2-ab)=k(2+ab)+\sqrt{2}\cdot k(a+b)$...............2p

Cum $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$ $\quad k=0$ sau $a+b=0$..1p

Din $k=0\Rightarrow ab=2$ şi deci $(a,b)\in\{(1,2),(2,1),(-1,-2),(-2,-1)\}$......1p

Din $a+b=0\Rightarrow b=-a$ şi prin înlocuire obţinem $k=-2+\dfrac{8}{2-a^2}\in\mathbb{Z}$....1p

$\Rightarrow 2-a^2\in D_8=\{1,-1,2,-2,4,-4,8,-8\}$...................................1p

şi obţinem $(a,b)\in\{(1,-1),(-1,1),(0,0),(2,-2),(-2.2)\}$..................1p

2. $a=\sqrt{(x+y-11)^2}+\sqrt{(x+y+4)^2}=|x+y-11|+|x+y+4|$...................3p.

Din $x\in(-3;5)$ **şi** $y\in(-1;6)$ deducem: $x+y-11<0$ **şi** $x+y+4>0$.....2p

Finalizare 2p

3.a) Din $(\mathrm{a+b})^2\le 2\left(\mathrm{a}^2+\mathrm{b}^2\right)\Rightarrow \mathrm{a+b}\le\sqrt{2}\mathrm{d}_1$ 1p

La fel $\mathrm{b+c}\le\sqrt{2}\mathrm{d}_2$, respectiv $\mathrm{a+c}\le\sqrt{2}\mathrm{d}_3$ 1p

Înmulţind relaţiile găsite , deducem că $(\mathrm{a+b})(\mathrm{a+c})(\mathrm{b+c})\le 2\sqrt{2}\mathrm{d}_1\mathrm{d}_2\mathrm{d}_3$...............1p

Din ipoteză avem deci egalitatea, de unde $\mathrm{a=b=c}$, adică paralelipipedul este cub…1p

b) Se consideră piramida triunghiulară regulată $BACB'$.

Ducem $BP\perp(AB'C)\Rightarrow$ Peste centrul cercului circumscris $\triangle AB'C$............1p

$\Rightarrow AP=\dfrac{l\sqrt{3}}{3}$, unde $l=a\sqrt{2}$ şi deci $AP=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.................................1p

Finalizare: $BP=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$ 1p

4. $A'B\parallel D'C$ şi $\triangle ACD'$ echilateral $\Rightarrow m\left(\widehat{AD',A'B}\right)=60^0$......................................3p

Fie $E\in(DA$ astfel încât $[AD]\equiv[AE]\Rightarrow A'E\parallel AD'$..1p

$\triangle A'CE$ este dreptunghic $\Rightarrow m\left(\widehat{AD',A'C}\right)=90^0$..2p

Finalizare 1p