Inspectoratul Şcolar Judeţean Dolj
Filiala Craiova a SSMR

Etapa locală a Olimpiadei Naţionale de Matematică
Craiova, 16 februarie 2014
Clasa a VII-a

Problema 1.
Fie $a, b, c \in \mathbb{Z}$ numere impare. Să se arate că

$$\{x \in \mathbb{Q} | ax^2 + bx + c = 0\} = \emptyset.$$

***

Problema 2.
Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ numere reale astfel încât

$$a_1 + b_1 = a_2 + b_2 = \cdots = a_n + b_n = s.$$

Să se demonstreze că

$$(a_1b_1 + \cdots + a_nb_n)^2 \geq (a_1^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + \cdots + b_n^2 - ns^2).$$

***

Problema 3.
Fie ABC un triunghi ascuţitunghic, iar A', B', C' mijloacele segmentelor $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$. Paralela dusă prin C' la BB' intersectează paralela dusă prin A la BC în A''.

a) Să se arate că $[C'A''] \equiv [BB']$, iar $[A''C] \equiv [AA']$.

b) Să se deducă faptul că medianele $[AA']$, $[BB']$, $[CC']$ pot fi laturile unui triunghi.

***

Problema 4.
Fie $ABCD$ un patrulater şi $\{O\} = AC \cap BD$. Arătaţi că dacă

$$\frac{A_{AOB}}{A_{BOC}} + \frac{A_{BOC}}{A_{COD}} + \frac{A_{COD}}{A_{AOD}} + \frac{A_{AOD}}{A_{AOB}} = 4,$$

atunci $ABCD$ este paralelogram.

(G. M. 6-7-8/2013)

Notă:
Timp de lucru: 3 ore.
Toate subiectele sunt obligatorii;
Fiecare problemă se notează cu puncte de la 1 la 7;