HUNEDOARA Olimpiada de matematică Faza Zonală - 12 februarie 2011

Clasa a VII-a

1. **a)** Să se arate că $\dfrac{2^{n-1}}{(2^n+1)(2^{n+1}+1)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2^n+1}-\dfrac{1}{2^{n+1}+1}\right)$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$;

b) Să se determine $n\in\mathbb{N}^*$ pentru care $\dfrac{1}{3\cdot 5}+\dfrac{2}{5\cdot 9}+\dfrac{4}{9\cdot 17}+...+\dfrac{2^{n-1}}{(2^n+1)(2^{n+1}+1)}=\dfrac{2^{2010}-1}{3(2^{2011}+1)}$.

(Gazeta Matematică Nr.7-8-9 din 2010, enunț modificat)

2. **a)** Dați exemplu de trei numere $a,b,c\in\mathbb{N}^*$ pentru care $a^2=b^2+c^2$;

b) Să se arate că dacă $a,b,c\in\mathbb{N}^*$ pentru care $a^2=b^2+c^2$ atunci $a<b+c$;

c) Să se arate că dacă $a,b,c\in\mathbb{N}^*$ pentru care $a^2=b^2+c^2$ atunci $b+c-a$ este divizibil cu 2.

(Gazeta Matematică Nr.10 din 2010, enunț modificat)

3. Se consideră trapezul isoscel $ABCD$, în care $AB\parallel CD$, $AB<CD$ şi $m(\sphericalangle DAC)<90^0$. Fie O intersecția diagonalelor trapezului. Mediatoarele segmentelor $[AO]$ și $[DO]$ se intersectează în punctul P.

a) Să se demonstreze că $PO\perp BC$;

b) Dacă $P\in(AD)$, să se arate că $AC\perp BD$.

4. Fie triunghiul isoscel ABC $([AB]\equiv[AC])$, S mijlocul lui $[AB]$, P mijlocul lui $[AC]$. Considerăm punctele $M\in(SB)$ și $N\in(PA)$ astfel încât $[BM]\equiv[AN]$. Fie $MN\cap SP=\{Q\}$.

a) Să se arate că $[MQ]\equiv[NQ]$; **b)** Să se arate că $MN\geq\dfrac{BC}{2}$.

Clasa a VIII-a

1. **a)** Arătați că numărul $p=\underbrace{\overline{xxxx..x2}}_{2011\,cifre}\cdot\underbrace{\overline{xxxx..x6}}_{2011\,cifre}+4$ este pătrat perfect, oricare ar fi cifra nenulă x;

b) Arătați că numărul $p=\underbrace{\overline{xxxx..x2}}_{2011\,cifre}\cdot\underbrace{\overline{xxxx..x8}}_{2011\,cifre}+10$ nu este pătrat perfect, oricare ar fi cifra nenulă x.

2. Fie $x,y,z\geq 0$.

a) Să se demonstreze că $\dfrac{z}{(1+x+y+z)^2}\leq\dfrac{1}{1+x+y}-\dfrac{1}{1+x+y+z}$; *(Gazeta Matematică*

b) Folosind eventual punctul anterior să se demonstreze că

$$\frac{x}{(1+x)^2}+\frac{y}{(1+x+y)^2}+\frac{z}{(1+x+y+z)^2}\leq\frac{x+y+z}{1+x+y+z};$$

3. Pe planul pătratului $ABCD$ se construieşte $SA\perp(ABC)$. Fie $SA=AB=a$. Fie N mijlocul laturii CD.

a) Să se arate că $BD\perp SC$;

b) Dacă $AC\cap BD=\{O\}$ și T este proiecția lui O pe SC, calculați lungimea segmentului TO;

c) Calculați distanța de la punctul S la dreapta BN. *(Gazeta Matematică*

4. Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$ de latură 1.

a) Să se arate că oricare ar fi punctul M pe fața $(A'B'C'D')$ avem $MA^2+MC^2=MB^2+MD^2$;

b) Dacă $P\in[BB']$, $Q\in[CC']$, $R\in[DD']$, determinați valoarea minimă a sumei $AP+PQ+QR+RA'$.