OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
etapa locală

Clasa a VIII- a
13 Februarie 2010

SUBIECTUL I (7p)

3p) a) Să se demonstreze că $\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}\geq 2, \forall a,b\in(0,+\infty)$. În ce situație inegalitatea dată devine egalitate?

3p) b) Să se demonstreze că $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq 3, \forall a,b,c\in(0,\infty)$. În ce situație inegalitatea devine egalitate?

1p) c) Să se rezolve ecuația: $2^x+\left(\frac{2}{3}\right)^x+\left(\frac{3}{4}\right)^x=3$

SUBIECTUL II (7p)

3p) a) Să se calculeze $\left[\sqrt{n^2+n}\right], n\in\mathbb{N}^*$

4p) b) Să se determine ultima cifră a numărului $\left[10\sqrt{n^2+n}\right], n\in\mathbb{N}^*$

SUBIECTUL III (7p)

7p) Fie un paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile a,b respectiv c.
Ştiind că $a,b,c\in\mathbb{N}^*$, $ab+bc+ac=abc$ şi $a<b<c$ să se demonstreze că $d+a=b+c$, unde d este lungimea diagonalei paralelipipedului.

SUBIECTUL IV(7p)

7p) Se consideră piramida patrulateră regulată $VABCD$ cu baza $ABCD$ şi un plan α, $\alpha \nparallel (ABC)$ care intersectează segmentele (VA), (VB), (VC) şi (VD) în punctele M,N,P şi respectiv Q. Arătați că: $\frac{MA}{MV}+\frac{PC}{PV}=\frac{NB}{NV}+\frac{QD}{QV}$.

NOTĂ: ***Fiecare subiect este notat cu un punctaj de la 0 la 7 puncte.***
Timp de lucru – 3 ore.