OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Clasa a VIII- a
13 Februarie 2010

Barem de corectare

SUBIECTUL I (7p)

a) Aplicând $m_a \geq m_g$ obținem $\dfrac{\sqrt{\dfrac{a}{b}}+\sqrt{\dfrac{b}{a}}}{2} \geq 2\sqrt{\sqrt{\dfrac{a}{b}}\cdot\sqrt{\dfrac{b}{a}}}$	2p
Finalizare	0,5p
Egalitate pentru $a=b$	0,5p
b) $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}\geq 2\sqrt{\dfrac{a}{c}}$	1p
$\dfrac{c}{a}+1\geq 2\sqrt{\dfrac{c}{a}}$	1p
Finalizare folosind a) şi determinare condiție de egalitate $a=b=c$	1p
c) $x=0$ soluție unică folosind b)	1p

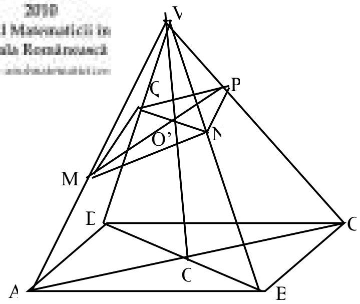
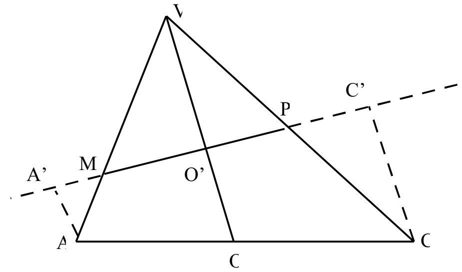
SUBIECTUL II (7p)

a) $n^2 < n(n+1) < (n+1)^2$	1p
$n<\sqrt{n(n+1)}<n+1$	1p
$\left[\sqrt{n(n+1)}\right]=n$	1p
b) $\left(n+\dfrac{2}{5}\right)^2 < n(n+1) < \left(n+\dfrac{1}{2}\right)^2$	2p
$10n+4<10\sqrt{n^2+n}<10n+5$	1p
Ultima cifră a numărului $\left[10\sqrt{n(n+1)}\right]$ este 4.	1p

Subiectul III (7p)	
Relația dată se rescrie $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=1$ $a=1$ nu convine	1p
$a=2 \Rightarrow \dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{2} \Rightarrow b=c=4$ (nu convine) sau $b=3, c=6$	2p
Pentru $a\geq 3 \Rightarrow b,c>3 \Rightarrow \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}<1$	2p
Deci $a=2,\ b=3,\ c=6 \Rightarrow d=7$	1p
Finalizare	1p

Subiectul IV (7p)

Subiecte şi bareme elaborate sau adaptate de:
Prof. Daniel Năstruț
Prof. Liviu Tiron
Prof. Pancu Codruț

 	
Considerăm $AC \cap BD = \{O\}$ şi $MP \cap NQ = \{O'\}$ În triunghiul $\triangle VAC$ construim paralelele $AA' \parallel VO$ şi $CC' \parallel VO$ unde punctele $A', C' \in MP$. În mod evident obţinem că $\triangle AA'M \sim \triangle VO'M$ şi $\triangle CC'P \sim VO'P$ de unde rezultă egalităţile: $\left.\begin{array}{l} \dfrac{MA}{MV} = \dfrac{AA'}{VO'} \\ \dfrac{PC}{PV} = \dfrac{CC'}{VO'} \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{MA}{MV} + \dfrac{PC}{PV} = \dfrac{AA'}{VO'} + \dfrac{CC'}{VO'} = \dfrac{AA' + CC'}{VO'} \qquad (1)$	3p
În trapezul $AA'C'C$ avem OO' linie mijlocie, deci $AA' + CC' = 2 \cdot OO' \qquad (2)$ Din relaţiile (1) şi (2) rezultă că: $\dfrac{MA}{MV} + \dfrac{PC}{PV} = \dfrac{2 \cdot OO'}{VO'}$	3p
În mod analog se arată că: $\dfrac{NB}{NV} + \dfrac{QD}{QV} = \dfrac{2 \cdot OO'}{VO'}$ de unde rezultă egalitatea dorită.	1p

Subiecte şi bareme elaborate sau adaptate de:
Prof. Daniel Năstruţ
Prof. Liviu Tiron
Prof. Pancu Codruţ