1. CLASA a VIII a   OLM

Fie $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât

$$a^2 + b^2 - 3a - 5b + \frac{33}{4} = 0.$$

Să se demonstreze că $4 \leq a+b+1 \leq 6$.

G.M.B 10/2009

BAREM DE CORECTARE

1p $\quad 4a^2 + 4b^2 - 12a - 20b + 33 = 0$

1p $\quad 4a^2 - 12a + 9 + 4b^2 - 20b + 25 = 1$

1p $\quad (2a-3)^2 + (2b-5)^2 = 1$

2p $\quad -1 \leq 2a - 3 \leq 1$

$-1 \leq 2b - 5 \leq 1$

1p $\quad 1 \leq a \leq 2$

$2 \leq b \leq 3$

1p $\quad 4 \leq a + b + 1 \leq 6$

ASA a $\overline{VIII}$ a   OLM

Să se determine numerele întregi m și n, dacă

$$\frac{m}{\sqrt{2(2+\sqrt{3})}} + \frac{n}{\sqrt{2(2-\sqrt{3})}} = \sqrt{19-8\sqrt{3}}$$

Ion. Tiotioi

BAREM DE CORECTARE

(2p) $$\sqrt{2(2+\sqrt{3})} = \sqrt{4+2\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{3}+1)^2} = \sqrt{3}+1$$

$$\sqrt{2(2-\sqrt{3})} = \sqrt{4-2\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} = \sqrt{3}-1$$

(2p) $$\frac{m}{\sqrt{3}+1} + \frac{n}{\sqrt{3}-1} = 4-\sqrt{3}$$

$$(\sqrt{3}-1)m + (\sqrt{3}+1)n = 4-\sqrt{3}$$

(1p) $$(-m+n)+(m+n)\sqrt{3} = 2(4-\sqrt{3})$$

(2p) $$\begin{cases} -m+n = 8 \\ m+n = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -5 \\ n = 3 \end{cases} \Rightarrow S=\{(-5;3)\}$$

$m, n \in \mathbb{Z}$

OLM

- 2010 -

PROPUNERE - OLIMPIADĂ - CLASA a VIII-a

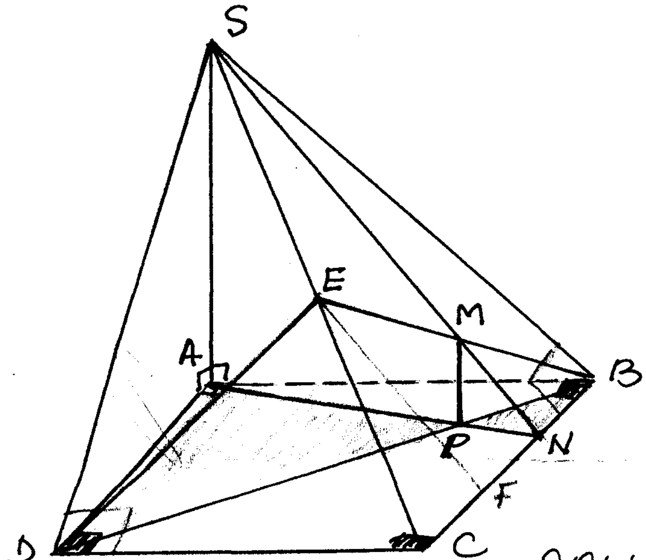
Pe planul dreptunghiului ABCD ($[AB] > [BC]$) se ridică perpendiculara SA. Dacă E este mijlocul segmentului $[SC]$ se cere:

a) Demonstrați că triunghiul DEB este isoscel.

b) Arătați că $[BD] < [SC]$

c) Dacă M este mijlocul lui $[BE]$, $SM \cap BC = \{N\}$ iar $BD \cap AN = \{P\}$, arătați că $MP \parallel (SAD)$.

PROF. NICOLAE JURUBIȚĂ
- MEDGIDIA -



SOLUȚIE

a) Demonstrează că $SB \perp BC$ și $SD \perp DC$ 1p

Demonstrează că $BE = \frac{1}{2}SC$ și $DE = \frac{1}{2}SC \Rightarrow [BE] \equiv [DE]$ 1p

b) În $\triangle BDE$: $[BD] < [BE] + [DE]$ 0,5p

dar $[BE] + [DE] = \frac{1}{2}[SC] + \frac{1}{2}[SC] = [SC] \Rightarrow [BD] < [SC]$ ... 0,5p

c) Construiește $EF \parallel SN \Rightarrow MN =$ linie mijl. în $\triangle BEF \Rightarrow [MN] = \frac{1}{2}[EF]$ 0,5p

$\Rightarrow [BN] \equiv [NF]$ și $[EF] = 2[MN]$. Dacă $[EF] = 2a$; $[MN] = a$ 0,5p

În $\triangle SNC$: $EF =$ l. mijl. $\Rightarrow [SN] = 2[EF] = 4a \Rightarrow [CF] \equiv [FN]$ 0,5p

Arată că $[BN] = \frac{1}{3}[BC] \Rightarrow [BN] = \frac{1}{3}[AD]$ 0,5p

Dem. că $\triangle PBN \sim \triangle PDA \Rightarrow \frac{PN}{PA} = \frac{BN}{AD} = \frac{1}{3}$ 0,5

În $\triangle NSA$: $\frac{NM}{MS} = \frac{1}{3} = \frac{PN}{NA} \xrightarrow{R.T.Th} MP \parallel SA$ 1p

Deoarece: $\left.\begin{array}{l} MP \parallel SA \\ SA \subset (SAD) \end{array}\right\} \Rightarrow MP \parallel (SAD)$ 0,5p

TOTAL = 7p.

Clasa a VIII-a OLM

Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$ cu latura de 9 cm.
Din fiecare vârf se înlătură câte o piramidă regulată cu muchiile laterale de 3 cm.

a) Calculați aria totală a corpului obținut.

b) Calculați lungimea segmentului determinat pe diagonala cubului de planele bazelor piramidelor.

~~Numero~~ Se numerotează fiecare vârf al corpului cu numere de la 1 la 24.
Notăm cu S_k, $k \in \{1, \dots, 8\}$, suma numerelor corespunzătoare vârfurilor ~~unui triunghi~~ unei fețe triunghiulare a corpului.

c) Arătați că există o numerotare a vârfurilor astfel încât $S_k \vdots 3$, $\forall k$, $k \in \{1, \dots, 8\}$.

d) Arătați că nu există o numerotare a vârfurilor astfel încât

$$3 \nmid S_i \text{ și } 3 \mid S_j, \text{ unde } j \in \{1, \dots, 8\} \setminus \{i\}.$$

prof. ALEX. CARNARU

BAREM DE CORECTARE

(2p) a) Determinarea ariei unui triunghi $\frac{9\sqrt{3}}{2}\ cm^2$
Determinarea ariei totale $18(21+2\sqrt{3})\ cm^2$

(2p) b) Determinarea înălțimii unei piramide regulate $\sqrt{3}$ cm
Determinarea lungimii segmentului ~~pe~~ diagonalei $7\sqrt{3}$ cm

(1p) c) Prezentarea unei numerotări astfel încât oricare sumă S_k este divizibilă cu 3.

(2p) d) Presupunem că există o numerotare astfel încât $3 \nmid S_i$ și $3 \mid S_j$

Dar $S_1 + S_2 + \dots + S_8 = 1 + \dots + 24 = 12 \cdot 25 \vdots 3$ și $3 \mid S_j$ $\Big\} \Rightarrow$