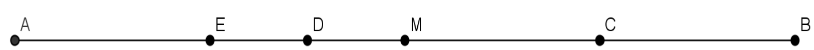
Clasa a V-a

SUBIECTUL		BAREM DE CORECTARE	PUNCTAJ TOTAL
1	a	$x=\left[1+\left(2^2\cdot 3^4\right):\left(2^2\cdot 3^2\right)-8\right]^{67\cdot 30}$ $x=\left(1+3^2-8\right)^{2010}=2^{2010}$ $y=\left(2^4\right)^{1000}:\left(2^2\right)^{1000}\cdot 2=2^{4000}:2^{2000}\cdot 2=2^{2001}$ $z=430\cdot(1326-1300)-26\cdot 429+486=430\cdot 26-26\cdot 429+486$ $z=26\cdot(430-429)+486=512$	1p 1p 1p 1p
	b	$\left(2^{2010}:2^{2001}-512\right)^{2010}=\left(2^9-512\right)^{2010}=0^{2010}=0$	1p
	c	$U\left(2^{2001}\right)=U\left(2^{4\cdot 500+1}\right)=2$	1p
	d	$x=2^{2010}=\left(2^{1005}\right)^2$ este pătrat perfect $x=2^{2010}=\left(2^{670}\right)^3$ este cub perfect	1p
2		$3^2+3^3+3^4+...3^{2010}=\left(3^2+3^3+3^4+3^5+3^6+3^7+3^8\right)+$ $+\left(3^9+3^{10}+3^{11}+3^{12}+3^{13}+3^{14}+3^{15}\right)+...+$ $+\left(3^{2004}+3^{2005}+3^{2006}+3^{2007}+3^{2008}+3^{2009}+3^{2010}\right)=$ $=3^2\cdot\left(1+3+3^2+3^3+3^4+3^5+3^6\right)+3^9\cdot\left(1+3+3^2+3^3+3^4+3^5+3^6\right)+...+$ $+3^{2004}\cdot\left(1+3+3^2+3^3+3^4+3^5+3^6\right)=$ $=\left(1+3+3^2+3^3+3^4+3^5+3^6\right)\cdot 3^2\cdot\left(1+3^7+3^{14}+...+3^{2002}\right)=$ $=1093\cdot 3^2\cdot\left(1+3^7+3^{14}+...+3^{2002}\right)$ Cum 1093 este număr prim, avem a=1093, b=3 Finalizare $a+b^6+2\cdot b^4+b^3-b^0=1093+729+162+27-1=2010$	2p 2p 2p 1p
3		Deoarece $\overline{ab6}$ este un număr de trei cifre rezultă a+b+1∈ {7, 8, 9} Cum $U\left(\overline{ab6}\right)=6$ şi $U\left(2^{4k}\right)=6$ rezultă că a+b+1=8 sau a+b=7 Deci $2^{a+b+1}=2^8=256$ a=2 şi b=5	2p 2p 1p 1p 1p

4		Fie mulțimea divizorilor lui n : $1=d_1< d_2< d_3<... <d_{k-1}< d_k=n$ $1+ d_2+ d_3+... +d_{k-1}+n= n+7$ $d_2+ d_3+... +d_{k-1}=6$, dar $d_2 \geq 2, d_3 \geq 3$ $\Rightarrow k=4$ şi $n=8$ Avem $d_2=2$, $d_3=4$, $d_4= n =8$ şi $1+2+4+8=8+7$	**2p** **2p** **1p** **1p** **1p**

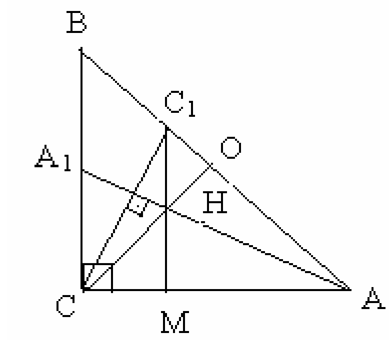
Clasa a VI-a

PROBLEMA		BAREM DE CORECTARE	PUNCTAJ TOTAL
1		$\left.\begin{array}{l}\frac{x}{3}=\frac{y}{4}\ \Big\vert\cdot\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{x}{9}=\frac{y}{12}\\ \frac{y}{6}=\frac{z}{5}\ \Big\vert\cdot\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{y}{12}=\frac{z}{10}\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{x}{9}=\frac{y}{12}=\frac{z}{10}=k$ $\left.\begin{array}{l}x=9k,\ y=12k,\ z=10k\\ 2x+3y+4z=188\end{array}\right\}\Rightarrow 94k=188\Rightarrow k=2$ x=18, y =24, z=20	**3p** **2p** **2p**
2		$B=111(a+b+c)$ $B=3\cdot 37(a+b+c),\ 57=3\cdot 19$ Cum B se divide cu 57 $\Rightarrow$ 19/ (a+b+c), deci a+b+c=19 Dar 9/A, cum A= 999a+99a+9b+a+a+b+c, avem: 9/(2a+b+c), adică 9/ (a+19) $\Rightarrow$ a=8, deci b+c=11 5/A , dar A= 1000a+100a+10b+c deci c=5 şi rezultă b=6 Deci A=8865	**1p** **2p** **1p** **1p** **2p**
3	**a**	$AC=AB-BC=AB-\frac{AB}{4}=\frac{3AB}{4}$  $AD=DC=\frac{AC}{2}=\frac{3AB}{8}$ $AE=AD-DE=AD-\frac{AD}{3}=\frac{2AD}{3}=\frac{2\cdot 3AB}{3\cdot 8}=\frac{AB}{4}$ Din ipoteză avem: BC=$\frac{AB}{4}$ Deci $[AE]\equiv[BC]$	**1p** **1p** **1p** **1p**

	b	Fie O mijlocul lui $[EC] \Rightarrow CO = OE = \frac{EC}{2} = \frac{AB}{4}$ $EC = AB - AE - CB = AB - \frac{AB}{4} - \frac{AB}{4} = \frac{AB}{2}$ $AO = AE + EO = \frac{AB}{2}$ Fie M mijlocul segmentului $[AB]$, atunci: $AM = MB = \frac{AB}{2}$, $AO = \frac{AB}{2}$, deci AM=AO, adică punctele O şi M coincid $\Rightarrow$ că segmentele AB şi CE au acelaşi mijloc	**1p** **1p**
	c	$DM = AM - AD = \frac{AB}{2} - \frac{3AB}{8} = \frac{AB}{8}$ $\frac{AB}{8} = 4 \Rightarrow AB = 32$	**1p**
4	**a**	Notăm $m(\measuredangle AOC) = x$ $m(\measuredangle COD) = 180^0 - (90^0 - x) = 90^0 + x$ $m(\measuredangle BOD) = 90^0 - 2x$ $m(\measuredangle COM) = \frac{1}{2} m(\measuredangle BOD) + m(\measuredangle COD) = \frac{90^0 - 2x}{2} + 90^0 + x = 135^0$	**1p** **1p** **2p**
	b	$\frac{m(\measuredangle AOC) + m(\measuredangle COD)}{2} + m(\measuredangle DOM) = \frac{x}{2} + \frac{90^0 + x}{2} + \frac{90^0 - 2x}{2}$ Finalizare $\frac{m(\measuredangle AOC) + m(\measuredangle COD)}{2} + m(\measuredangle DOM) = 90^0$	**2p** **1p**

Clasa a VII-a

PROBLEMA		SUBIECTUL **BAREM DE CORECTARE**	PUNCTAJ TOTAL
1		Ar trebui să avem: 2010 $=a^2-b^2$, $a,b \in \mathbb{Z}$ Deci 2010= (a-b)(a+b). Avem două cazuri. *Cazul 1*: Dacă a şi b au aceeaşi paritate $\Rightarrow (a-b)\vdots 2$ şi $\Rightarrow (a+b)\vdots 2$,deci $(a^2-b^2)\vdots 4$, dar 2010 nu este divizibil cu 4. Deci egalitatea este imposibilă *Cazul 2*: Dacă a şi b au parităţi diferite, atunci a^2-b^2 este un număr impar, dar 2010 este par. Deci egalitatea este imposibilă Concluzie : Nu există $a ,b \in \mathbb{Z}$ astfel încât $a^2-b^2=2010$	**1p** **3p** **2p** **1p**
2	**a**	$\frac{3a+4b+5c}{2a+3b}=\frac{3b+4c+5a}{2b+3c}=\frac{3c+4a+5b}{2c+3a}=\frac{12(a+b+c)}{5(a+b+c)}=\frac{12}{5}$ $A=\sqrt{\frac{3a+4b+5c}{10a+15b}+\frac{3b+4c+5a}{10b+15c}+\frac{3c+4a+5b}{10c+15a}}=$ $A=\sqrt{\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{3a+4b+5c}{2a+3b}+\frac{3b+4c+5a}{2b+3c}+\frac{3c+4a+5b}{2c+3a}\right)}$ $=\sqrt{\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{12}{5}+\frac{12}{5}+\frac{12}{5}\right)}=\frac{6}{5}$ Finalizare [A]=1	**1p** **1p** **1p** **1p**
	b	Folosind punctul a) şi inegalitatea mediilor găsim : $\frac{3a+4b+5c}{\sqrt{6ab}}=\frac{12}{5}\cdot\frac{2a+3b}{\sqrt{6ab}}\geq\frac{12}{5}\cdot\frac{2a+3b}{\frac{2a+3b}{2}}=\frac{24}{5}$ şi analoagele. $\sqrt{\frac{3a+4b+5c}{\sqrt{6ab}}+\frac{3b+4c+5a}{\sqrt{6bc}}+\frac{3c+4a+5b}{\sqrt{6ca}}}=$ $=\sqrt{\frac{12}{5}\cdot\frac{2a+3b}{\sqrt{6ab}}+\frac{12}{5}\cdot\frac{2b+3c}{\sqrt{6bc}}+\frac{12}{5}\cdot\frac{2c+3a}{\sqrt{6ca}}}\geq$ $\geq\sqrt{\frac{24}{5}+\frac{24}{5}+\frac{24}{5}}=\frac{6\sqrt{10}}{5}$	**1p** **1p** **1p**

<table>
<tr>
<td>3</td>
<td></td>
<td>


Construim $C_1M \parallel BC,\ M \in (AC)$.
Fie $\{H\} = (AA_1) \cap (C_1M)$.
$\Delta AHC_1 \sim \Delta AA_1B$ (teorema fundamentală a asemănării) (1)
Fie $\{O\} = (CH) \cap (AB)$
$C_1M \perp AC \quad (C_1M \parallel BC)$ (2)
$CC_1 \perp AA_1$ (ipoteză) $\Leftrightarrow AH \perp CC_1$ (3)
Din (2) şi (3) rezultă că H este ortocentrul ΔACC_1
Deci $CH \perp AB \Rightarrow$ CO este mediană în ΔABC (dreptunghic isoscel)
Deoarece CO şi AA_1 sunt mediane în ΔABC rezultă că H este centrul de greutate al ΔABC.
Avem $\dfrac{A_1H}{HA} = \dfrac{1}{2}$. Folosind relația (1) găsim $\dfrac{BC_1}{C_1A} = \dfrac{1}{2}$
</td>
<td>1p

2p
1p
2p
1p</td>
</tr>
</table>

4		ΔABC isoscel $\Rightarrow$ AB=AC sau AB=BC sau AC=BC **Cazul 1**: AB=AC, CG=AB şi $GP=\dfrac{CG}{2}=\dfrac{AB}{2}$, cum GP este mediană în $\Delta AGB \Rightarrow m(\measuredangle AGB)=90^0$, deci $BG\perp AG$ (1) $\Delta BAG\equiv\Delta CAG\ (L.U.L)\Rightarrow \measuredangle AGB\equiv\measuredangle AGC\Rightarrow CG\perp AG$ (2) Din (1) şi (2) avem că dreptele CG şi BG coincid sau sunt paralele$\Rightarrow$contradicție. **Cazul 2**: BC=BA, de unde AM=CP , CG=AB şi $GP=\dfrac{CG}{2}=\dfrac{AB}{2}$, cum GP este mediană în $\Delta AGB \Rightarrow m(\measuredangle AGB)=90^0$, deci $BG\perp AG$ (3) $\Delta BAG\equiv\Delta BCG\ (L.U.L)\Rightarrow \measuredangle AGB\equiv\measuredangle CGB\Rightarrow CG\perp BG$ (4) Din (3) şi (4) avem că dreptele AG şi CG coincid sau sunt paralele$\Rightarrow$contradicție **Cazul 3**: AC=BC, CG=AB şi $GP=\dfrac{CG}{2}=\dfrac{AB}{2}$, cum GP este mediană în $\Delta AGB \Rightarrow m(\measuredangle AGB)=90^0$, deci $BG\perp AG$. Deoarece M şi N sunt mijloacele laturilor BC şi AC avem: MN linie mijlocie în ΔABC, deci $MN \parallel AB$, dar AM=BN$\Rightarrow$ABMN este trapez isoscel ortodiagonal, $A_{ABMN}=\dfrac{d^2}{2}=\dfrac{72}{2}=36\text{ cm}^2$, unde d=AM Dar într-un trapez isoscel ortodiagonal aria este egală si cu pătratul înălțimii, unde înălțimea este media aritmetică a bazelor . Fie $\{T\}=CP\cap MN\Rightarrow TP=\sqrt{36}=6\,\text{cm}$. MN fiind linie mijlocie în ΔABC, avem : CT=TP=6 cm, deci CP=12 cm	**1p** **2p** **1p** **1p** **1p** **1p**

Clasa a VIII-a

SUBIECTUL		BAREM DE CORECTARE	PUNCTAJ TOTAL
1		Avem că: $\frac{1}{n^3} < \frac{1}{(n-2)(n-1)n} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(n-2)(n-1)} - \frac{1}{(n-1)n}\right]$ (1) Înlocuind în (1) $n \in \{3,4,5,...,2010\}$ şi însumând inegalitățile avem: $0 < \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + ... + \frac{1}{2009^3} + \frac{1}{2010^3} <$ $< \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2009 \cdot 2010}\right) < \frac{1}{4}$ $0 < \sqrt{\frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + ... + \frac{1}{2009^3} + \frac{1}{2010^3}} < \frac{1}{2} \Rightarrow$ $\Rightarrow \sqrt{\frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + ... + \frac{1}{2009^3} + \frac{1}{2010^3}} \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$	2p 1p 2p 1p 1p
2	a	$\sqrt{17-12\sqrt{2}} = 3-2\sqrt{2}$, $\sqrt{18-8\sqrt{2}} = 4-\sqrt{2}$ A=$\frac{18-5\sqrt{2}(5+x)}{15}$ A$\in \mathbb{Q} \Rightarrow x=-5$ Finalizare A=$1\frac{1}{5}$	2p 1p 1p
	b	$4020^2 : \left[\left(2^5-2^3\right) \cdot 670\right] + 1 + \frac{6}{5} - \frac{6}{5}$ =1006 $\frac{x+2010}{y+2010} - 1 + \frac{x+2008}{y+2008} - 1 + \frac{x+2006}{y+2006} - 1 + ... + \frac{x+4}{y+4} - 1 + \frac{x+2}{y+2} - 1 + \frac{x}{y} - 1 = 0$ $(x-y) \cdot \left(\frac{1}{y+2010} + \frac{1}{y+2008} + \frac{1}{y+2006} + ... + \frac{1}{y+4} + \frac{1}{y+2} + \frac{1}{y}\right) = 0$ Finalizare x=y	1p 1p 1p
3	a	$DB \perp BC$ şi $BD = a\sqrt{3}$ Dar $MD \perp (ABCD)$, deci $MD \perp DB$ cu teorema celor trei perpendiculare, avem $MB \perp BC \Rightarrow d(M, BC) = MB = 2a$	1p 1p

	b	DQ $\perp$ QC şi QC= $a\sqrt{3}$, dar $MD \perp (ABCD)$, deci $MD \perp DQ$ (MQ=a$\sqrt{2}$) Cu teorema celor trei perpendiculare, avem $MQ \perp QC \Rightarrow A_{\Delta MQC} = \frac{MQ \cdot QC}{2} = \frac{a^2\sqrt{6}}{2}$ cm^2	**1p** **1p**
	c	Fie $DQ \cap BC = \{S\}$.În acest caz (MDQ)$\cap$(MBC)=MS. Construim QE$\perp$MS, E$\in$ MS.Cum CQ$\perp$(MDQ) obținem CE$\perp$MS. QE=$\frac{a\sqrt{5}}{5}$ $tg\left(\measuredangle\left((MDQ),(MBC)\right)\right) = tg(\measuredangle CEQ) = \sqrt{15}$	**2p** **1p**
4		$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$ $d^2 = \left(4n^4 + 8n^3 + 4n^2\right) + \left(4n^4 + 24n^3 + 52n^2 + 48n + 16\right) +$ $+\left(n^4 + 4n^3 + 10n^2 + 12n + 9\right)$ $d^2 = 9n^4 + 36n^3 + 66n^2 + 60n + 25$ $d^2 = \left(3n^2 + 6n + 5\right)^2$ $d = \sqrt{\left(3n^2 + 6n + 5\right)^2} = 3n^2 + 6n + 5 \in \mathbb{N}$	**1p** **2p** **1p** **2p** **1p**