OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 13.02.2010
CLASA a VIII- a

BAREM DE CORECTARE

SUBIECTUL I

a) Determinaţi numerele reale x, y, z ştiind că x + y + z = 6 şi xy + xz + yz = 12

G.M. nr. 6/2009

b) Arătaţi că numărul $S = 6^3 + 13^3 + 20^3 + ... + (7n-1)^3 + 15n$ se divide cu 7 $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

G.M. nr. 7, 8, 9/2009

Rezolvare :

a) $x^2 + y^2 + z^2 = (x+y+z)^2 - 2(xy+xz+yz) = 12$ 1p

$x^2 + y^2 + z^2 = xy + xz + yz \Leftrightarrow (x-y)^2 + (x-z)^2 + (y-z)^2 = 0 \Rightarrow x = y = z$ 1p

Finalizare $x = y = z = 2$ 1p

b) $S = (7\cdot 1-1)^3 + (7\cdot 2-1)^3 + (7\cdot 3-1)^3 + ... + (7n-1)^3 + 15n$ 1p

$S = M_7 - n + 15n$ 2p

Finalizare 1p

Oficiu 3p

www.mategl.com

SUBIECTUL II

Fie numărul $S = \frac{1}{1^4+1^2+1} + \frac{2}{2^4+2^2+1} + \frac{3}{3^4+3^2+1} + ... + \frac{2010}{2010^4+2010^2+1}$.

a) Arătaţi că $\frac{2n}{n^4+n^2+1} = \frac{1}{n^2-n+1} - \frac{1}{n^2+n+1}, \forall n \in \mathbf{N}^*$;

b) Calculaţi $\left[S + \frac{3}{2}\right]$, unde prin [*a*] am notat partea întreagă a numărului real *a*.

Rezolvare :

a) Verificarea egalităţii 2p

b) $S = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1^2-1+1} - \frac{1}{1^2+1+1}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2^2-2+1} - \frac{1}{2^2+2+1}\right] + ... + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2010^2-2010+1} - \frac{1}{2010^2+2010+1}\right]$
… 1p

Verificarea relaţiei $n^2 + n + 1 = (n+1)^2 - (n+1) + 1$ 1p

Calculul lui $S=\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{2010^2+2010+1}\right]$ …………………………………… 2p

Finalizare $\left[S+\frac{3}{2}\right]=1$ ………………………….…………………………... 1p

Oficiu …………………………………………..…………………….. 3p

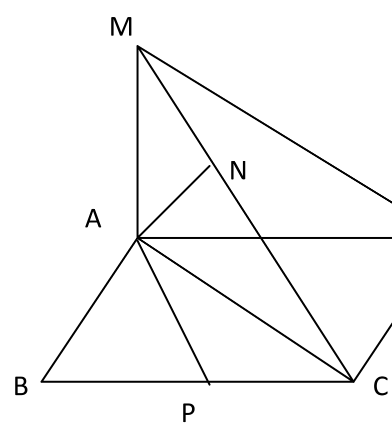
SUBIECTUL III

Se consideră paralelogramul ABCD în care AB = a$\sqrt{2}$ cm, AD = 2a$\sqrt{2}$ cm iar $m(\angle ABC)=60^o$. Fie AM$\perp$(ABC), AM = a$\sqrt{10}$ cm.

a) Arătaţi că $m(\angle BAC)=90^o$;

b) Calculaţi distanţa de la punctul M la dreapta CD;

c) Calculaţi distanţa de la punctul A la planul (MCD).



Rezolvare :

a) Fie P mijlocul lui [BC] :

ΔABP echilateral $\Rightarrow m(\angle BAP)=60^o$ ……………………………….……… 1p

ΔPAC isoscel $\Rightarrow m(\angle PAC)=30^o$ si finalizare ……………………...… 1p

b) MC$\perp$CD ……………………………………………………….. 1p

AC = a $\sqrt{6}$ cm ……………………………………………………… 1p

MC = 4a cm ……………………………………………………….. 1p

c) Construim AN$\perp$MC

AN$\perp$(MCD) ……………………………………………………….. 1p

Finalizare AN = $\frac{\sqrt{15}}{2}a$ 1p

Oficiu 3p

SUBIECTUL IV

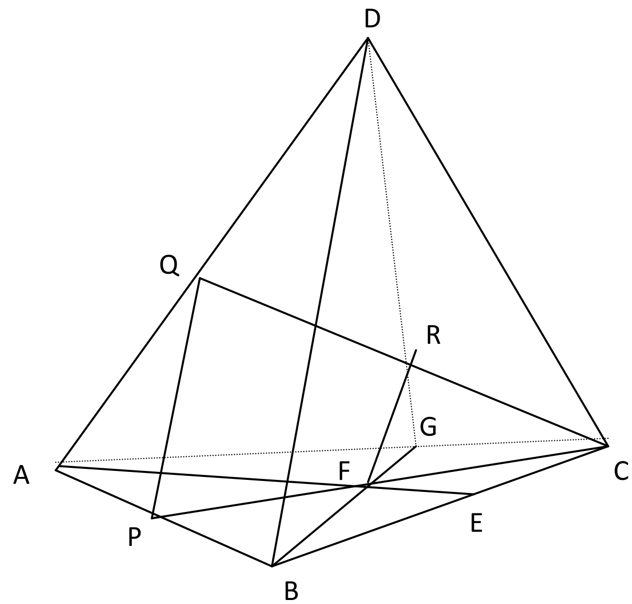
Se consideră tetraedrul ABCD în care AC = AB + CD. Fie [AE bisectoarea unghiului BAC, E$\in$ BC. Construim BF$\perp$AE, F$\in$ AE. Considerăm BF$\cap$AC = {G} şi CF$\cap$AB = {P}. Paralela prin P la dreapta BD intersectează dreapta AD în Q.

Notăm {R} = CQ $\cap$DG. Demonstraţi că:

a) [AB]$\equiv$[AG];

b) PQ $\parallel$ FR;

c) [CQ este bisectoarea unghiului ACD.



Rezolvare:

a) In ΔABG avem [AF bisectoare şi inaltime $\Rightarrow$ ΔABG isoscel $\Rightarrow$ AB = AG ... 2p

b) $\left.\begin{array}{c} PQ \parallel BD \subset (BDG) \\ PQ \subset (PQC) \\ (PQC) \cap (BDG) = FR \end{array}\right\} \Rightarrow$ PQ $\parallel$ FR 2p

c) ΔCGD isoscel 1p

FR linie mijlocie in ΔGBD 1p

Finalizare 1p

Oficiu 3p

www.mategl.com