

Clasa a VII-a

1. a) Demonstrați că media geometrică a două numere pozitive este mai mică sau cel puțin egală cu media lor aritmetică. (7 p)
 b) Fără a extrage rădăcina pătrată, arătați că $S < 4$, unde

$$S = \frac{\sqrt{20}}{9} + \frac{\sqrt{30}}{11} + \frac{\sqrt{42}}{13} + \frac{\sqrt{56}}{15} + \frac{\sqrt{72}}{17} + \frac{\sqrt{90}}{19} + \frac{\sqrt{110}}{21} + \frac{\sqrt{132}}{23}$$
2. Să se arate că nu pot exista numere întregi a, b și c , astfel încât: (7 p)
 $abc - a = 1983 \quad abc - b = 20 \quad abc - c = 4$
3. În dreptunghiul $ABCD$ notăm cu O intersecția diagonalelor. Perpendiculara din O pe AC intersectează latura DC în E și bisectoarea unghiului DAC în F . Perpendiculara în F pe AF intersectează latura DC în G . Se cere: (7 p)
 a) Să se arate că triunghiul FEG este isoscel;
 b) Să se afle valoarea unghiului DAC pentru care dreapta FG este paralelă cu DB .
4. Pe laturile unghiului xOy se iau punctele $A, B, C \in (Ox)$ și $A', B', C' \in Oy$ astfel încât $AB \parallel BA'$ și $BC \parallel CB'$. Să se arate că $AC \parallel CA'$ (7 p)

Clasa a VIII-a

1. Se dă $E = x^2(x^2 + 3) + x^2(3x + 2) + 2x^2(x + 3) + x(x^2 + 6)$ (7 p)
 a) Să se arate că expresia este divizibilă cu 4 pentru orice valoare întreagă a lui x
 b) Să se verifice identitatea $\frac{E}{x^2 + 4x + 3} = x(x + 2)$.
2. Fie $a, b \in \mathbf{R}$ astfel încât $a = b - 1$ și $b \in [1, 3]$. Să se arate că: (7 p)

$$\sqrt{a^2 + b^2 - 2b + 1} + \sqrt{a^2 + b^2 - 4a - 6b + 13} = 2\sqrt{2}$$
3. Fie cubul $ABCD A'B'C'D'$ cu $AB = a$. Să se arate că: (7 p)
 a) $(A'BD)$ și $(CB'D')$ împart diagonala $[AC']$ în trei părți congruente;
 b) Distanța dintre planele $(A'BD)$ și $(CB'D')$ este $\frac{AC'}{3}$.
4. Fie A, B, C și D patru puncte necoplanare. Notăm cu G_1, G_2 și G_3 centrele de greutate ale triunghiurilor ABD, ACD și respectiv BCD . (7 p)
 a) Să se arate că dacă triunghiul ABC este dreptunghic, atunci și triunghiul $G_1G_2G_3$ este dreptunghic.
 b) În ipoteza că triunghiul ABD este echilateral și CG_1 este perpendiculară pe planul determinat de A, B și D , să se afle unghiul dreptelor AC și BD .