

COLEGIUL NAȚIONAL IAȘI
OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 2011

SOLUȚII

Clasa a V-a

1. Cum $A = 2 \cdot 3^{330}$, $B = 2^{551}$, $C = 2 \cdot 5^{220}$, iar $5^{220} = (5^2)^{110} < 3^{330} = (3^3)^{110} < (2^5)^{110} = 2^{550}$, rezultă că $C < A < B$.

2. a) Observăm că numărul $\overline{aabb} = 11 \cdot (100 \cdot a + b)$ este pătrat perfect dacă și numai dacă $100a + b = 11 \cdot k^2$. Atunci $11 | a + b$ și, cum a și b sunt cifre, deducem că $a + b = 11$. Mai mult, trebuie ca $9 \cdot a + 1 = k^2$, de unde se obține unica soluție $a = 7$, $b = 4$.

b) Din teorema împărțirii cu rest obținem că $\overline{ab} = n \cdot b + c$, $\overline{bc} = n \cdot c + a$, $\overline{ca} = n \cdot a + b$. Prin adunarea acestor egalități găsim că $11 \cdot (a + b + c) = (n + 1) \cdot (a + b + c)$, de unde $n = 10$. Deducem că $\overline{ab} = \overline{bc} = \overline{ca}$, prin urmare $a = b = c$.

3. a) $101 \cdot 101 = 10201$ elemente.

b) Numerele trebuie să fie de forma $2^3 \cdot 5^b$ cu $b \geq 3$ sau $2^a \cdot 5^3$ cu $a \geq 3$. În total, $98 + 98 = 196$ numere au proprietatea dată.

4. Fie $a_1, a_2, \dots, a_{2011}$ vârstele celor 2011 persoane. Presupunem prin reducere la absurd că oricare doi vecini au suma vârstelor cel mult egală cu 81: $a_1 + a_2 \leq 81$, $a_2 + a_3 \leq 81$, ..., $a_{2011} + a_1 \leq 81$. Prin adunarea tuturor acestor relații deducem că $2 \cdot 3^{11} \leq 81 \cdot 2011$, de unde $2 \cdot 3^7 \leq 2011$, adică $4327 \leq 2011$ (absurd!). Astfel, presupunerea inițială este falsă și urmează concluzia problemei.

Clasa a VI-a

1. a) Întrucât $2011 - 3 = M_3 + 1$, rezultă că $a = 7$. Apoi, $2010 - 3 = M_3$, deci $c = 6$, iar $1007 - 3 = M_3 + 2$, prin urmare $b = 2$. Astfel, $x = 51,853(726)$.

b) Din $2n - 1 | 4n + 3$ și $2n - 1 | 4n - 2$ rezultă că $2n - 1 | 5$, de unde $2n - 1 \in \{1, 5\}$, deci $n \in \{1, 3\}$.

2. a) Avem că $x = 405 \cdot 9^{2009} = (8 \cdot 50 + 5) \cdot 9^{2009} = 50y + 5 \cdot 9^{2009}$, cu $5 \cdot 9^{2009} < y$. Rezultă că restul cerut este $5 \cdot 9^{2009}$.

b) Observăm că $\overline{xyz} | a = \overline{xyz} \cdot 10000 + 2010$ și $\overline{xyz} | 2010 \cdot 1000 + \overline{xyz}$ dacă și numai dacă $\overline{xyz} | 2010$, deci când $\overline{xyz} \in \{2 \cdot 67, 3 \cdot 67, 5 \cdot 67, 6 \cdot 67, 10 \cdot 67\}$.

3. Deoarece $AB = 2^{10}$ cm, obținem imediat că $M_k B = 2^{10-k}$, $\forall k = \overline{1, 10}$. Atunci $M_4 M_9 = M_4 B - M_9 B = 2^6 - 2^1 = 62$.

4. Cum $m(\sphericalangle AON) < m(\sphericalangle BON)$, rezultă că semidreapta $[OB$ este interioară unghiului $\sphericalangle AOM$, deci $m(\sphericalangle MOB) = 60^\circ$. Dacă $[OE$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle MOB$ și $[OF$ este bisectoarea lui $\sphericalangle AON$, deducem că $m(\sphericalangle AOF) = 10^\circ$, deci $m(\sphericalangle AON) = 20^\circ$ și atunci $m(\sphericalangle MON) = 110^\circ$.

Clasa a VII-a

1. Considerăm, fără a restrânge generalitatea, că $AB < AC$; în acest caz, $D \in [BM]$. Cum PN și MN sunt linii mijlocii în triunghiul ABC, atunci $PN \parallel BC$ și $MN \parallel AB$. Întrucât AB și PD sunt concurente, rezultă că MN și PD sunt concurente. Patrulaterul DMNP este trapez, având două laturi paralele și două neperalele. Cum $MN = \frac{1}{2}AB$ (linie mijlocie în $\triangle ABC$) și $DP = \frac{1}{2}AB$ (mediană în triunghiul dreptunghic ADB), atunci $MN = DP$, adică DMNP este trapez isoscel.

Dacă $AB = AC$, punctele M și D coincid, iar patrulaterul DMNP degenerază într-un triunghi isoscel, asemenea cu cel inițial, raportul de asemănare fiind $\frac{1}{2}$.

2. Folosind procedeul uzual de sumare telescopică, obținem că suma elementelor lui A este $S = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{99 \cdot 100} = \frac{99}{100}$. Suma elementelor unei submulțimi B a lui A este strict pozitivă și mai mică decât S, deci subunitară și de aici rezultă că nu poate fi număr natural.

3. Este evident că unghiurile $\sphericalangle TQS$ și $\sphericalangle TDM$ au măsurile de 45° . În triunghiul dreptunghic isoscel PDQ, mediana TD este egală cu jumătatea TQ a ipotenuzei. Cum $QC = AD (= BC)$, $m(\sphericalangle CQT) = m(\sphericalangle ADT) = 135^\circ$ și $TQ = DT$, rezultă că $\triangle CQT \equiv \triangle ADT$ (U.L.U.), de unde $\sphericalangle TCQ \equiv \sphericalangle DAT$. Însă unghiurile $\sphericalangle TCQ$ și $\sphericalangle CMD$ sunt complementare și atunci $\sphericalangle DAT$ și $\sphericalangle CMD$ sunt complementare, deci $m(\sphericalangle ATM) = 90^\circ$, adică $AT \perp CM$. Întrucât $\sphericalangle CTQ \equiv \sphericalangle ATD$, deducem că $\sphericalangle STQ \equiv \sphericalangle MTD$, prin urmare $\triangle SQT \equiv \triangle MDT$ (U.L.U.) și de aici rezultă concluzia problemei.

4. Avem că $z = \frac{17x + 5y}{2} = 8x + 2y + \frac{x + y}{2}$, deci $\frac{x + y}{2} = n, n \in \mathbb{N}$. Obținem că $y = 2n - x$ și $z = 5n + 6x$. Înlocuind aceste valori, deducem că $A = \frac{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot (x + n)^2 (2x + 3n)^2}{210}$, prin urmare $A = (x + n)^2 (2x + 3n)^2$ și concluzia se impune.

Clasa a VIII-a

1. Fie A, B, C, D cele patru puncte necoplanare. În triunghiurile ABC, ACD și ABD, medianele AM, AN și AP sunt împărțite de centrele de greutate $G_1 \in AM, G_2 \in AN, G_3 \in AP$ în rapoartele $\frac{AG_1}{G_1M} = \frac{AG_2}{G_2N} = \frac{AG_3}{G_3P} = 2$. Se deduce că $G_1G_2 \parallel MN$ și $G_1G_3 \parallel MP$, de unde $(G_1G_2G_3) \parallel (BCD)$.

Analog se procedează în cazul în care considerăm alte trei centre de greutate.

2. Numărătorul lui x se poate scrie sub forma $7a - 2$, unde $a = \overline{111\dots1}$ este număr de n cifre; procedând analog, obținem că $x = \frac{7a - 2}{7a + 1}$ și $y = \frac{8a - 3}{8a + 1}$. Cum diferența celor două numere este $x - y = \frac{1 + 4a}{(7a + 1)(8a + 1)} > 0$, deducem că $x > y$.

3. a) Întrucât $SA \perp (ABC)$, iar $BD \subset (ABC)$, rezultă că $SA \perp BD$. Avem și că $AC \perp BD$ (ABCD pătrat), prin urmare $BD \perp (SAC)$. Cum $SC \subset (SAC)$, deducem că $BD \perp SC$.

b) Fie O centrul pătratului ABCD. În $\triangle SAC$ construim $OQ \perp SC, Q \in SC$ și demonstrăm că $OQ \perp BD$, deci OQ va fi perpendiculara comună celor două drepte. Într-adevăr, am arătat anterior că $BD \perp (SAC)$ și, cum $OQ \subset (SAC)$, rezultă că $OQ \perp BD$. Din $\triangle OQC \sim \triangle SAC$ se obține că $OQ = \frac{a\sqrt{6}}{6}$.

c) Construim $AT \perp BM, T \in BM$; cum $SA \perp (ABC)$, din teorema celor trei perpendiculare urmează că $ST \perp BM$, deci distanța de la punctul S la dreapta BM este ST. Aria triunghiului ABM este jumătate din cea a pătratului ABCD, iar $BM = \frac{a\sqrt{5}}{2}$, prin urmare $AT = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$. Cu teorema lui Pitagora în triunghiul SAT, calculăm $ST = \frac{3a\sqrt{5}}{5}$.

4. Presupunem că numărul dat este rațional; rezultă că există $x \in \mathbb{Q}_+$ astfel încât $x^2 = n + \sqrt{n + 1}$. În aceste condiții $\sqrt{n + 1} = x^2 - n \in \mathbb{Q}^*$ și, cum $n + 1$ este număr natural nenul, există $y \in \mathbb{N}$ pentru care $y^2 = n + 1$, deci $x^2 = y^2 + y - 1 \in \mathbb{N}^*$, cu $x \in \mathbb{Q}_+$ și $y \in \mathbb{N}^*$. Deducem că $x \in \mathbb{N}^*$. Însă $x^2 = y^2 + y - 1 > y^2$ și $x^2 = y^2 + y - 1 < y^2 + 2y + 1 = (y + 1)^2$, așadar $y^2 < x^2 < (y + 1)^2, x, y \in \mathbb{N}^*$, ceea ce este imposibil. Presupunerea făcută este falsă, deci numărul $\sqrt{n + \sqrt{n + 1}}$ este irațional.