INSPECTORATUL ŞCOLAR AL MUNICIPIULUI BUCUREŞTI

ŞCOALA GIMNAZIALA nr. 56 – BUCUREŞTI

Concursul Interjudeţean de Matematică al Şcolii Gimnaziale nr. 56

Ediţia a XIV – a

24.01.2015

CLASA a IV-a

1. Alina spune:” Dacă aş avea de 4 ori mai mulți bani decât am , atunci averea mea ar depăși suma de 1000 de lei, exact cu suma care lipsește acum să am 1000 lei”. Câți bani are Alina?

2. 6 caiete , 3 pixuri și 2 gume costă 38 lei. 3 caiete, 6 pixuri și o gumă costă 28 lei , iar 1 caiet, 2 pixuri și 3 gume costă 12 lei. Aflați cât costă :
   a) o gumă
   b) un caiet și un pix
   c) un caiet.

3. Avem la dispoziție trei vase de capacitati egale cu: 3 litri, 7 litri respectiv 10 litri, ultimul vas fiind plin cu apă. Cum putem să împărțim apa în 2 cantități egale cu ajutorul celor trei vase fără să pierdem apa?

4. Un număr natural se numeste “norocos “ daca suma cifrelor sale se împarte exact la 13.
   a) Aflați cel mai mic număr norocos nenul.
   b) Aflați cel mai mare număr norocos de 3 cifre.
   c) Dați un exemplu de două numere consecutive, ambele norocoase.

Timp de lucru 2 ore.
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte.

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE- clasa a IV-a

1. Suma Alinei
   De 4 ori suma Alinei
   1000 lei

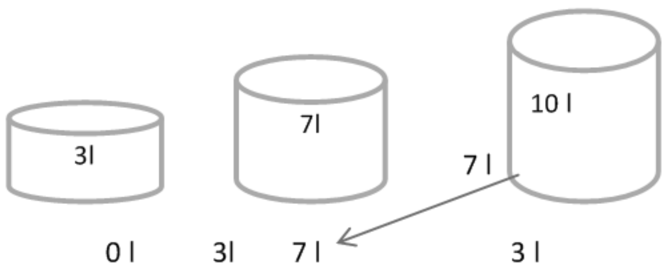
   ....4p
   Un segment reprezintă 1000 lei :5= 200 lei..2p
   Alina are 400 lei 1p
2. a) 6 c.....3p......2g........38lei
   3c......6p......1g........28 lei
   1c.......2p......3g.......12 lei 1p
   3c......6p......1g........28 lei
   3c.......6p......9g.......36 lei 1p
   8g................8lei, atunci o gumă costă 1 leu...1p

   b)6c......3p.............36 lei

   3c.......6p............27 lei 1p
   9c........9p...........63 lei...1p
   1c........1p............7lei..1p

   c)1c.........2p...........9lei atunci 1 pix costă 2 lei și un caiet costă 5 lei......................................1p

3.



Pasul 1	0 l	3l	7 l		3 l
Pasul 2	3 l		4l		3 l
Pasul 3	0 l		4l		6 l
Pasul 4	3 l		1l		6 l
Pasul 5	0 l		1 l		9 l
Pasul 6	1 l		0 l	7l	9 l
Pasul 7	1 l	2l	7		2 l
Pasul 8	3 l		5 l	3 l	2 l
Pasul 9	0 l		5 l		5 l

4. a) 49 ....1p
   b) 998...2p
   c) Deoarece n și n+1 trebuie să aibă suma cifrelor un număr care se împarte exact la 13 rezultă că ultima cifră a lui n trebuie să fie 9...1p
   Exemplu: n=48999 are suma cifrelor 39 și n+1= 49000 are suma cifrelor 13 ....3p

INSPECTORATUL ŞCOLAR AL MUNICIPIULUI BUCUREŞTI

ŞCOALA GIMNAZIALA nr. 56 – BUCUREŞTI

Concursul Interjudeţean de Matematică al Şcolii Gimnaziale nr. 56

Ediţia a XIV – a

24.01.2015

CLASA a V-a

1. Determinați numerele naturale n ce satisfac simultan condițiile:
   a) Câtul împărțirii lui n la 9 este un număr de două cifre identice.
   b) Câtul împărțirii lui $n + 96$ la 4 este un număr de trei cifre identice. (Gh. Stoica, R.M.T)

2. a) Arătați că $56565656 \cdot 201520152015 = 565656565656 \cdot 20152015$.
   b) Scrieți numărul 55^3 ca o sumă de cinci pătrate perfecte nenule.

3. Mulțimea numerelor naturale impare 1, 3, 5, 7, 9, 11,…se scrie într-un tabel astfel:
   1
   3 5
   7 9 11
   13 15 17 19
   ....
   a) Aflați care este primul număr din linia 56.
   b) Arătați că suma numerelor din linia 56 este mai mică decât 180 000.(Rozica Stefan)

4. Se consideră mulțimea $M=\{5^a \cdot 3^b \cdot 4^c$ / a, b, c sunt cifre nenule în baza 10$\}$
   a) Arătați că nu există două submulțimi disjuncte A și B ale lui M , astfel încât $A \cup B = M$ și produsul elementelor din A să fie egal cu produsul elementelor din B.
   b) Arătați că orice submulțime cu 5 elemente a lui M conține cel puțin două elemente distincte al căror produs este un pătrat perfect.

Timp de lucru 2 ore.
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte.

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE- clasa a V-a

1. n=9$\cdot\overline{aa}$+r și r$\in$\{0, 1, 2, ..,8\} a $\in$\{ 1, 2, ..,8,9\} (1)

n+96=4$\cdot\overline{bbb}$+s și s$\in$\{0, 1, 2,3\} b$\in$\{ 1, 2, ..,8,9\} (2) ……………………………………..1p

Din prima relație, n$\leq$899$\Rightarrow$n+96 $\leq$ 995 ....1p

4$\cdot\overline{bbb}$+s$\leq$ 995$\Rightarrow$ b$\in$\{ 1, 2\}…………………………………………………………………..…..1p

Dacă b=1$\Rightarrow$ n+96$\in$\{444, 445, 446,447\} $\Rightarrow$n$\in$\{348, 349, 350,351\} …………………………1p

Numerele 348, 349, 350,351 la împărțirea cu 9 nu dau câtul de forma $\overline{aa}$……………………1p

Dacă b=2$\Rightarrow$ $\Rightarrow$n$\in$\{792, 793, 794,795\} ……………………………………..…………………1p

Numerele 792, 793, 794,795 verifică relația (1) deci sunt soluția problemei …………………1p

2. a) 56565656 $\cdot$ 201520152015 = 565656565656$\cdot$20152015 $\Leftrightarrow$

56$\cdot$1010101$\cdot$2015 $\cdot$100010001=56$\cdot$10101010101$\cdot$2015$\cdot$ 10001…………………………………2p

56$\cdot$101$\cdot$ 10001 $\cdot$ 2015 $\cdot$ 10001 $\cdot$ 10001=56 $\cdot$ 101 $\cdot$ 100010001 $\cdot$ 2015 $\cdot$ 10001………………1p

56$\cdot$101$\cdot$ 10001 $\cdot$ 2015 $\cdot$ 10001 $\cdot$ 10001=56$\cdot$101$\cdot$ 10001 $\cdot$ 10001 $\cdot$ 2015 $\cdot$ 10001………………1p

b) $1^2+2^2+3^2+4^2+5^2=55$……………………………………………………………………………1p

$55^3=55^2(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2)=55^2+(55\cdot2)^2+(55\cdot3)^2+(55\cdot4)^2+(55\cdot5)^2$……………………………......2p

3. a) Pentru scrierea numerelor din primele 55 de linii se folosesc 1+2+3+…+55 numere ………..1p

1+2+3+…+55=55$\cdot$56:2=1540 (1)…………………………………………………………….…1p

Linia a 56-a începe cu al 1541 –lea număr impar…………………………………………….....1p

Linia a 56-a începe cu 2$\cdot$1540+1=3081 (2)………………………………………………..…..1p

b) S=(2$\cdot$1540+1) +(2$\cdot$1540+3)+…+(2$\cdot$1540+111)…………………………………………………1p

S=175616…………………………………………………………………………….………..2p

4. a) Presupunem prin reducere la absurd că există două submulțimi disjuncte *A* și *B* ale lui *M* , astfel încât $A\cup B=M$ și produsul elementelor din A să fie egal cu produsul elementelor din B. Atunci produsul elementelor din *M* va fi un pătrat perfect (1)...1p

Produsul elementelor lui *M* este $(5^{45}3^{45}4^{45})^{81}$ care nu este un pătrat perfect , deci contrazice (1)………………………………………………...2p

b) $(2^a\cdot3^b\cdot4^c)\cdot(2^m\cdot3^n\cdot4^p)$ este pătrat perfect dacă *m+a* și *n+b* sunt pare ($4^m\cdot4^p=(2^{m+p})^2$ care este epătrat perfect...1p

$2^x\cdot3^y$ pot avea 4 forme $2^x\cdot3^y\in\{2^{par}\cdot3^{par}, 2^{par}\cdot3^{impar}, 2^{impar}\cdot3^{par}, 2^{impar}\cdot3^{impar}\}$………………………1p

O submultime cu 5 elemente a lui *M* , conform principiului lui Dirichlet conține două elemente care au aceeași formă , deci produsul celor două elemente va fi de forma $2^{par}\cdot3^{par}\cdot4^k$, deci un pătrat perfect..2p

INSPECTORATUL ŞCOLAR AL MUNICIPIULUI BUCUREŞTI

ŞCOALA GIMNAZIALA nr. 56 – BUCUREŞTI

Concursul Interjudeţean de Matematică al Şcolii Gimnaziale nr. 56

Ediţia a XIV – a

24.01.2015

CLASA a VI-a

1. Fie $\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle BOC$ două unghiuri cu măsurile de 50^0, respectiv 140^0, iar $(OD$ semidreapta opusă semidreptei $(OA$. Aflaţi:
   a) măsura unghiului $\sphericalangle AOC$
   b) măsura unghiului format de bisectoarea $(OX$ unghiului $\sphericalangle AOC$ cu bisectoarea $(OY$ a unghiului $\sphericalangle COD$.

2. Cinci numere naturale au proprietatea că suma pătratelor oricăror patru numere dintre acestea este un element al mulțimii $\{123, 203, 242, 258\}$. Determinați cele cinci numere. (Marcel Chiriţă, G.M.)

3. Determinați numerele naturale nenule n, care au $\frac{n}{2}+1$ divizori. (Sena Azis)

4. În plan, în jurul punctului O sunt așezate segméntele (OA_1), (OA_2), (OA_3),…, (OA_{56}) în această ordine, astfel încât $\sphericalangle A_1OA_2$, $\sphericalangle A_2OA_3$,…, $\sphericalangle A_{56}OA_1$ să fie unghiuri formate în jurul punctului O.
   Doi copii se joacă și colorează fiecare pe rând, câte unul, sau două segmente alăturate. (Un segment se colorează o singură dată) Cine a colorat ultimul segment, câştigă.
   Găsiți o strategie a unuia dintre jucători astfel ca acesta să câștige indiferent de ce joacă celălalt.

Timp de lucru 2 ore.
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte.

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE- clasa a VI-a

1. Cazul I $\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle BOC$ adiacente m($\sphericalangle AOC$)=170^0 ....1p

m($\sphericalangle COD$)=10^0....................1p

justificare m($\sphericalangle XOY$)=90^0....................2p

Cazul II $\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle BOC$ neadiacente m($\sphericalangle AOC$)=90^0 ....1p

m($\sphericalangle COD$)=90^0....................1p

justificare m($\sphericalangle XOY$)=90^0....................1p

2. Fie $a\leq b \leq c \leq d \leq e$, $a, b, c, d, e, \in \mathbf{N} \Rightarrow a^2\leq b^2\leq c^2 \leq d^2 \leq e^2$....................1p

$S= a^2+b^2+c^2 +d^2 +e^2$, $S_1=S-a^2$, $S_2=S-b^2$, $S_3=S-c^2$, $S_4=S-d^2$, $S_5=S-e^2 \Rightarrow S_1\geq S_2\geq S_3\geq S_4\geq S_5$....................1p

$S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 \in \{123, 203, 242, 258\}$ deci două dintre sumele S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 sunt egale(1)....................1p

$S_1+S_2+S_3+ S_4+ S_5=4S$ =par (2) Din (1) și (2) $\Rightarrow S_5=123, S_4=203, S_3=S_2=242, S_1=258 \Rightarrow 4S=1068$ 1p

$e^2=144\Rightarrow e=12$; $d^2= 64 \Rightarrow d=8$; $b^2=c^2=25\Rightarrow b=c=5$; $a^2=9\Rightarrow a=3$....................2p

$S_5=123, S_4=203, S_3=242, S_2=S_1= 258\Rightarrow 4S=1084\Rightarrow S=271 \Rightarrow e^2=148\Rightarrow e \notin$ N....................1p

3. n are ($\frac{n}{2}$+1) divizori naturali $\Rightarrow n =2k$, $k\in \mathbf{N}^*$ 1p

Dacă $k=1 \Rightarrow n =2$ care are $\frac{2}{2}$+1 divizori naturali 1p

Dacă $k\geq 2$ singurul divizor al lui n mai mare decât k este n....................1p

Cum n are k+1 divizori $\Rightarrow 1, 2, \ldots, k$ sunt divizori ai lui $n \Rightarrow k-1 / n\Rightarrow k-1 / 2k$....................2p

Din $k - 1/2k$ și $k - 1/2k - 2 \Rightarrow k - 1/2$ deci $k \in\{2,3\}$....................1p

Rezultă că $n \in\{4,6\}$ Ambele numere verifică relația n are $\frac{n}{2}$+1 divizori naturali 1p

4. Grupăm segmentele câte două astfel: $\{ (OA_1), (OA_{29})\}$, $\{(OA_2), (OA_{30})\}$, …,$\{ (OA_{28}), (OA_{56})\}$....................2p

Un jucător nu poate colora două segmente din aceeași grupă pentru că ele nu sunt alăturate....................1p

Dacă primul jucător colorează un segment dintr-o grupă, atunci al doilea jucător colorează al doilea segment din aceeași grupă....................1p

Dacă primul jucător colorează două segmente , atunci al doilea jucător colorează celelalte două segmente din grupele unde se află primele segmente....................2p

În acest mod, al doilea jucător completează de colorat grupele și câștigă....................1p

INSPECTORATUL ŞCOLAR AL MUNICIPIULUI BUCUREŞTI

ŞCOALA GIMNAZIALA nr. 56 – BUCUREŞTI

Concursul Interjudeţean de Matematică al Şcolii Gimnaziale nr. 56

Ediţia a XIV – a

24.01.2015

CLASA a VII-a

1. Numerele reale $\sqrt{1}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$,…, le rescriem într-un tabel astfel:

   $\sqrt{1}$
   $\sqrt{3}$ $\sqrt{5}$
   $\sqrt{7}$ $\sqrt{9}$ $\sqrt{11}$
   $\sqrt{13}$ $\sqrt{15}$ $\sqrt{17}$ $\sqrt{19}$
   ……..

   a) Cu ce număr începe linia 56?
   b) Care dintre linii încep cu un număr rational?

(***)

2. Determinați numerele naturale nenule n, știind că produsul divizorilor naturali ai lui n este $n^3\sqrt{n}$.

(Sena Azis)

3. Fie $ABCD$ un patrulater convex în care $M, N \in (AB)$, $P, Q \in (BC)$, $R, S \in (CD)$, $T, U \in (AD)$ astfel încât $AM=MN=NB$, $BP=PQ=QC$, $CR=RS=SD$ și $DT=TU=UA$.
   a) Arătați că aria patrulaterului $MNRS$ este o treime din aria lui $ABCD$.
   b) Dacă $SM \cap TQ=\{E\}$, $SM \cap UP=\{H\}$, $RN \cap TQ=\{F\}$, $RN \cap UP=\{G\}$,arătați că aria lui $EFGH$ este o noime din aria lui $ABCD$.

(***)

4. Fie I centrul cercului înscris în ΔABC. Pe paralela prin A la BC se iau punctele D și E astfel încât $\frac{DA}{AE}=\frac{AB}{AC}$, iar $[DB]$ și $[EC]$ sunt situate în semiplane opuse față de AI.
   Paralelele prin E şi D la CI, respectiv BI se intersectează în F.
   a) Demonstrați că F, A, I sunt coliniare.
   b) Demonstrați că $FA=AI \Leftrightarrow DA=AB$

(Eugen Radu).

Timp de lucru 3 ore.
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte.

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE- clasa a VII-a

1) a) Pentru scrierea numerelor din primele (n-1) linii se folosesc primele1+2+…+(n-1) numere naturale impare…………………………………………………………………………………….......…1p

1+2+3+…+(n-1)=$\frac{n(n-1)}{2}$.Al $\frac{n(n-1)}{2}$ lea număr impar este n(n-1)-1……………..……………....……..1p

Linia a n-a începe cu numărul $\sqrt{n(n-1)+1}$ 1p

deci linia a 56 –a începe cu numărul $\sqrt{3081}$……………………………………………........…....1p

b)$\sqrt{n(n-1)+1}$ =*a*, *a*∈Q

n∈**N** ⇒n^2-n+1∈**N** și $\sqrt{n(n-1)+1}$∈Q⇒$\sqrt{n(n-1)+1}$∈**N**, deci *a*∈**N**…………………………….....1p

n^2-n+1=a^2 ⇒4n^2-4n+1+3=4a^2⇒(2a+2n-1)(2a-2n+1)=3 (*)…………………………………..…1p

Deoarece a și n sunt numere naturale din (*) ⇒ (2a+2n-1)=1și(2a-2n+1)=3 sau (2a+2n-1)=3 și (2a-2n+1)=1

(a,n)∈$\{(1,0),(1,1)\}$, deci singura linie care începe cu un număr rațional este 1. ……………………....1 p.

2) Determinați numerele naturale nenule *n*, știind că produsul divizorilor naturali ai lui n este $n^3\sqrt{n}$.

Soluție: n$^3\sqrt{n}$ ∈**N** ⇒ *n* este pătrat perfect…………………………………………………......……..1p

Un pătrat perfect are un număr impar de divizori naturali. Notăm acest număr cu 2*k*+1……......…..…1p

Fie d_1, d_2, …, d_{2k+1} divizorii lui *n*, astfel încât 1=d_1<d_2<d_3<…<d_{2k+1}=*n*.

Atunci $d_1 \cdot d_{2k+1}= d_2 \cdot d_{2k}=\ldots =d_k \cdot d_{k+2}= n$ și $d_{k+1}=\sqrt{n}$…………………………………………………..……2p

Produsul divizorilor naturali ai lui n este $n^k \cdot \sqrt{n}$ de unde $n^k \cdot \sqrt{n} = n^3\sqrt{n}$, *n*∈**N***⇒*k*=3 sau n = 1……....1p

dacă n are 7 divizori naturali, atunci *n*=*p*^{6}, *p* număr natural prim……………………………...…...…2p

3. a) Fie M_1, N_1, B_1 picioarele perpendicularelor duse din *M*, *N*, *B* pe *DC*.

NN_1 linie mijlocie în MBB_1M_1 ⇒$2NN_1=MM_1+BB_1$...1p

2S_{NRS}=S_{DMS}+S_{BRC} (1)...1p

Analog 2S_{NMS}=S_{DMA}+S_{BRN} (2) . Din (1) și (2) ⇒S_{MNRS}=$\frac{1}{3}S_{ABCD}$...1p

b) Aplicând reciproca teoremei lui Thales $\Rightarrow TS//UR//AC//NP$ 1p

$\Delta DUR \sim \Delta DAC \Rightarrow \frac{UR}{AC} = \frac{DR}{DC} = \frac{2}{3}$; $\Delta BNP \sim \Delta BAC \Rightarrow \frac{BN}{AB} = \frac{NP}{AC} = \frac{1}{3}$, deci $\frac{NP}{UR} = \frac{1}{2}$ 1p

$NP//UR \Rightarrow \frac{NG}{GR} = \frac{1}{2} \Rightarrow NG = \frac{1}{3}RN$ Analog $RF = \frac{1}{3}RN$ deci $RF=FG=GN$ (3)..1p

Analog $SE=EH=HM$ (4) . Din (3) și (4), aplicând **a)** rezultă $S_{EFGH} = \frac{1}{3}S_{MNRS.} = \frac{1}{9}S_{ABCD.}$..............................1p

4. **a)** $\Delta DEF \sim \Delta BCI$ (U.U.) $\Rightarrow \frac{DE}{BC} = \frac{DF}{BI} = \frac{FE}{CI} = q$ (1)...1p

Fie A_1, B_1, C_1 picioarele bisectoarelor interioare. Din ipoteză și conform teoremei bisectoarei în ΔABC $\Rightarrow \frac{A_1B}{A_1C} = \frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE}$ (2)..1p

$\Rightarrow \frac{DA}{A_1B} = \frac{AE}{A_1C} = \frac{DA+AE}{A_1B+A_1C} = \frac{DE}{BC} = q$ (3) ; $\Delta DAF \sim \Delta BIA_1$, deci $\sphericalangle DFA \equiv \sphericalangle BIA_1$...1p

$DF//BI$ și $\sphericalangle DFA \equiv \sphericalangle BIA_1$ și A, I, A_1 coliniare rezultă F, A, I coliniare 1p

b) Din $\Delta DFA \sim \Delta BIA_1 \Rightarrow \frac{DA}{A_1B} = \frac{FA}{IA_1}$; $\frac{AI}{IA_1} = \frac{AB}{BA_1} = \frac{AC}{CA_1} = \frac{AB+AC}{BC}$ (t. bisectoarei)..1p

$BA_1 = \frac{AB \cdot BC}{AB+AC}$...1p

$FA = AI \Leftrightarrow \frac{FA}{IA_1} = \frac{AI}{IA_1} \Leftrightarrow \frac{DA}{A_1B} = \frac{AB+AC}{BC} \Leftrightarrow DA = AB$..1p

INSPECTORATUL ŞCOLAR AL MUNICIPIULUI BUCUREŞTI

ŞCOALA GIMNAZIALA nr. 56 – BUCUREŞTI

Concursul Interjudeţean de Matematică al Şcolii Gimnaziale nr. 56

Ediţia a XIV – a

24.01.2015

CLASA a VIII

1. Fie a,b$\in$**R,** $a+b\neq 0$, astfel încât numerele $a(2b^2-a^2)$, $b(2a^2-b^2)$, a^3+b^3 sunt numere raționale.Demonstrați că:

a) $a^6+b^6\in Q$.

b) $\frac{a^2b^2}{a+b}$ este rațional. (Dan Nedeianu, R.M.T).

2. Determinați cel mai mic număr natural n pentru care $\sqrt{n^2+2n+2}$ are primele două zecimale zerouri. (Eugen Radu)

3. În triunghiul ABC, fie $A'\in(BC)$, $B'\in(AC)$, $C'\in(AB)$, astfel încât ($A'A$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle B'A'C'$ și $AA'\cap BB'\cap CC'=\{O\}$. Pe perpendiculara în O pe planul (ABC) se consideră punctul V. Arătați că dreapta BC este perpendiculară pe dreapta VA.(Dana Radu)

4. Se consideră tetraedrul $ABCD$ și un punct M situat în interiorul triughiului BCD. Paralelele duse prin M la muchiile AB, AC, AD intersectează fețele (ACD), (ABD) respectiv (ABC) în punctele E, F, respectiv G. Dacă planul (BCD) este paralel cu planul (EFG) , demonstrați că M este centrul de greutate al triunghiului BCD. (Mihai Monea, Steluța Monea, G.M.)

Timp de lucru 3 ore.
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte.

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE- clasa a VIII-a

1.$a(2b^2-a^2) \in$ Q $\Rightarrow (a(2b^2-a^2))^2 \in$Q$\Rightarrow 4a^2b^4+a^6-4a^4b^2 \in$ Q (1)……………………………………1p

$b(2a^2-b^2) \in$ Q $\Rightarrow (b(2a^2-b^2))^2 \in$Q$\Rightarrow 4b^2a^4+b^6-4b^4a^2 \in$Q (2)…………………………………..…..1p

Din (1) și (2) $\Rightarrow a^6+b^6 \in$Q.(3)……………………………………………………………………..…1p

$a^3+b^3 \in$Q $\Rightarrow (a^3+b^3)^2 \in$Q $\Rightarrow a^6+b^6+2a^3b^3 \in$Q.(4)……………………………………………….…1p

Din (3) și (4) $\Rightarrow a^3b^3 \in$Q.(5)………………………………………………………………………..1p

$a(2b^2-a^2)+b(2a^2-b^2)+(a^3+b^3) \in$Q $\Rightarrow$2ab(a+b) $\in$Q (6)……………………………………..……1p

Din (5) și (6) și $ab \neq 0$și $a+b\neq 0$ $\Rightarrow \frac{a^3b^3}{ab(a+b)} \in$ Q $\Rightarrow \frac{a^2b^2}{a+b} \in$ Q; pentru $ab=0$ evident.…………………1p

2. $\left[\sqrt{n^2+2n+2}\right]=n+1$..2p

Primele două zecimale ale unui număr pozitiv *x* sunt $[(x-[x])\cdot 100]$ unde prin $[a]$ s-a notat partea întreagă a lui *a*...1p

Primele două zecimale ale lui $\sqrt{n^2+2n+2}$ sunt zerouri dacă $0\leq \sqrt{n^2+2n+2}-(n+1)<0{,}01$.......1p

$(n+1)<\sqrt{n^2+2n+2} \Leftrightarrow n^2+2n+1<n^2+2n+2$...1p

$\sqrt{n^2+2n+2}<(n+1{,}01) \Leftrightarrow n^2+2n+2<n^2+2{,}02n+1{,}0201$..1p

n> 48,995, n natural cel mai mic, rezultă n=49..1p

3. Paralela prin *A* la *BC* intersectează pe *A' C'* în *M* și pe *A' B'* în *N*...1p

$\Delta A\,C'M \sim \Delta BC'A' \Rightarrow \frac{AC'}{C'B}=\frac{AM}{BA'}$ (1) 1p

$\Delta A\,B'N \sim \Delta CB'A' \Rightarrow \frac{CB'}{B'A}=\frac{CA'}{AN}$ (2) 1p

Teorema lui Ceva în $\Delta ABC \Rightarrow \frac{AC'}{C'B}\cdot\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}=1$ (3)...1p

Din (1) , (2) și (3) $\Rightarrow MA=AN$, dar (*A'A* este bisectoarea unghiului $\sphericalangle B'A'C'$ deci $\Delta A'NM$ este isoscel și $A'A\perp MN$; $MN // BC$ deci $A'A\perp BC$...1p

finalizare...2p

4. Fie *R, S, T* intersecțiile dreptelor *BM, CM, DM* cu laturile *CD, BD*, respectiv *BC*.

Aplicând t.f.a. în $\triangle ABR$ pentru ME//AB $\Rightarrow \frac{RM}{RB} = \frac{RE}{RA}$ Analog $\frac{SM}{SC} = \frac{SF}{SA}$; $\frac{TM}{TD} = \frac{TG}{TA}$ (1) 1p

Planul (*ASR*) interesctează planele paralele (*GEF*) și (*BGC*) după dreptele paralele *FE* şi *SR*; Analog *GF*//*TS* şi *GE*//*TR* (2)..1p

Din (2) Aplicând Thales în triunghiurile *ASR*, *AST*, *ATR*, obținem: $\frac{RE}{RA} = \frac{SF}{SA} = \frac{TG}{TA}$ (3)............................1p

Din (1) şi (3) $\Rightarrow \frac{RM}{RB} = \frac{SM}{SC} = \frac{TM}{TD}$ (4)...1p

Dacă $M \in$Int $\triangle BCD$ atunci $\frac{RM}{RB} + \frac{SM}{SC} + \frac{TM}{TD} = \frac{S_{MCD}}{S_{BCD}} + \frac{S_{MBD}}{S_{BCD}} + \frac{S_{MCB}}{S_{BCD}} = \frac{S_{ABC}}{S_{BCD}} = 1$ (5).......................................1p

Din (4) şi (5) $\Rightarrow \frac{RM}{RB} = \frac{SM}{SC} = \frac{TM}{TD} = \frac{1}{3}$...1p

Finalizare 1p