

**CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
„JOSE MARTI”- EDIȚIA A VI-A**

BUCUREȘTI, 13.01.2007

Clasa a VIII-a

1. a) Arătați că, oricare ar fi a și b numere raționale nenule, există numerele raționale

nenule c și d astfel încât numărul $\frac{(a+b\sqrt{3})(c+d\sqrt{3})}{(a+b\sqrt{3})+(c+d\sqrt{3})}$ să fie rațional.

b) Arătați că, oricare ar fi k număr natural nenul, există numerele naturale m și n astfel încât $k = \frac{mn+1}{m+n}$.

2. Se dă triunghiul ABC , cu $AB < AC$. Bisectoarea unghiului $\angle BAC$ intersectează mediatoarea segmentului (BC) în punctul P . Fie N un punct pe segmentul (AC) astfel încât $AN = AB$. Dacă M este intersecția dreptelor AP și BC , arătați că:

- a) triunghiul PNC este isoscel;
- b) patrulaterul $PMNC$ este inscriptibil.

3. În prisma patrulateră regulată $ABCD A'B'C'D'$ avem $AB = a$, $AA' = b$. Fie O' centrul bazei $A'B'C'D'$.

- a) Calculați distanța dintre dreptele BO' și AD' .
- b) Calculați sinusul unghiului dintre dreptele BO' și AD' .

4. Pentru $a \in \mathbf{R}$, notăm cu $[a]$ cel mai mare număr întreg cel mult egal cu a (partea întreagă a lui a). Considerăm expresia $E(x) = [x] + [-x]$, $x \in \mathbf{R}$.

- a) Determinați elementele mulțimii $\{E(x) \mid x \in \mathbf{R}\}$.
- b) Câte numere x din intervalul $[0; 56]$ verifică egalitatea

$$E(x) + E(2x) + E(3x) + \dots + E(56x) + 48 = 0?$$

Timp de lucru: 3 ore