Concursul Interjudetean de Matematica
al Scolii nr. 56 “Jose Marti”
Editia a VII-a 12.01.2008
Clasa a IV-a

1.
4p a) Aflati x din egalitatea:

$$x : \{ 1 + [9 – (19 – 9 \cdot 2)] \} = 8$$

3p b) Jumatate din jumatatea sfertului unui numar este 2. Aflati numarul.

2. Doi elevi extrag bile din doua urne diferite, fiecare dintr-o singura urna. La fiecare extragere, primul elev ia cate 8 bile, iar al doilea cate 14 bile.

4p a) Care este cel mai mic numar de extrageri pe care trebuie sa le faca fiecare elev pentru ca cei doi sa aiba acelasi numar de bile extrase?

3p b) Cate bile extrage fiecare?

7p 3. Sa se arate ca oricum am alege semnele + si – , nu putem avea egalitatea:

$$1 \pm 2 \pm 3 \pm 4 \pm 5 \pm 6 = 0$$

4. In luna decembrie s-a organizat faza pe scoala a olimpiadelor scolare. Din cei 24 de elevi ai unei clase a IV-a, 9 elevi au participat la olimpiada de limba romana, 11 elevi la matematica si 7 elevi la olimpiada de educatie civica. 5 elevi au participat si la limba romana si la matematica, 4 elevi si la matematica si la educatie civica, 3 elevi au participat si la romana si la educatie civiva, iar 1 elev a participat la toate trei olimpiade.

4p a) Cati elevi au participat numai la olimpiada de matematica?

3p b) Cati elevi nu au participat la nici o olimpiada?

Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru 2 ore.

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ “JOSE MARTI” EDIȚIA a VII-a, BUCUREŞTI - 12.01.2008

Clasa a V-a

1. Să se calculeze: $216 \cdot 144 - 144 : 1 \cdot 72 - 144 \cdot 144 : 1 \cdot 144 : 144$.

2. Să se determine cel mai mare număr natural $n < 2500$ care, împărțit la un număr natural, diferit de zero, dă câtul 669 şi restul cu 2 mai mic decât împărțitorul.

3. În trei urne *A*, *B*, *C* se găsesc bile numerotate cu numere de la 1 la 10. Din urna *A* se extrage o bilă cu numărul *a* şi se transferă în urna *B*. Din urna *B* se extrage o bilă cu numărul *b* şi se transferă în urna *C*. Din urna *C* se extrage o bilă cu numărul *c* şi se transferă în urna *A*. După aceste operații se constată că suma numerelor înscrise pe bilele existente în urna *A* este cu 4 mai mică decât suma inițială a numerelor înscrise pe bilele din urna *A*, iar suma numerelor înscrise pe bilele existente în urna *B* este cu 5 mai mică decât suma inițială a numerelor înscrise pe bilele din urna *B* . Să se determine numerele *a*, *b* şi *c*.

4. Se dau mulțimile $A = \{x \in N \mid 2^{2008} < x \leq 2^{2009}\}$ şi $B = \{y \in N \mid 3^{1338} \leq y < 3^{1339}\}$.
Care dintre mulțimile *A* şi *B* are mai multe elemente. Justificați răspunsul.

- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Fiecare subiect se notează de la 0 la 7.**
- **Timpul efectiv de lucru este de 2 ore.**

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ “JOSE MARTI” EDIȚIA a VII-a, BUCUREŞTI - 12.01.2008

Clasa a VI-a

5. Să se calculeze: $10 \cdot 20,07 \cdot 2,0(08) - 30 \cdot 20,0(80) \cdot 0,669$.

6. Să se determine cel mai mic număr natural par de forma $\overline{abcd}$, scris în baza zece, cu proprietatea că $\overline{abcd} + \overline{dcba} = 10010$.

7. **a)** Să se determine cel mai mic număr natural n cu proprietatea că între numerele 5^n şi 5^{n+1} se află trei puteri diferite ale lui 2.

b) Să se arate că, pentru orice $n \in N$, între numerele 5^n şi 5^{n+1} se află cel mult trei puteri diferite ale lui 2.

8. Segmentul $[AB]$ are lungimea egală cu 55. Punctele $M_1,\ M_2,...,M_9$ împart segmentul $[AB]$ în 10 segmente: $[AM_1],\ [M_1M_2],\ [M_2M_3],...,[M_8M_9],\ [M_9B]$, ale căror lungimi sunt egale cu numere naturale nenule diferite.

a) Să se arate că mijlocul segmentului $[AB]$ nu coincide cu niciunul dintre punctele $M_1,\ M_2,...,M_9$.

b) Să se arate că există o distribuire a punctelor $M_1,\ M_2,...,M_9$ astfel încât mijlocul segmentului $[AB]$ să coincidă cu mijlocul unuia dintre cele 10 segmente.

- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Fiecare subiect se notează de la 0 la 7.**
- **Timpul efectiv de lucru este de 2 ore.**

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ “JOSE MARTI”
EDIȚIA a VII-a, BUCUREŞTI - 12.01.2008

Clasa a VII-a

9. Să se arate că: $\frac{3}{4} < \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{15}} + \frac{1}{\sqrt{35}} < 1$.

10. Se consideră mulțimea $M = \left\{ x \in Q \mid \quad x = \overline{0,abc} \quad si \quad \frac{2}{3} \le x \le \frac{5}{6} \right\}$.

Să se calculeze media aritmetică a numerelor din mulțimea *M*.

11. Doi elevi, *A* şi *B*, joacă următorul joc. *A* alege un număr natural de la 1 la 8. *B* adaugă la acest număr un număr natural de la 1 la 8 şi spune suma obținută. *A* adaugă acestei sume un număr natural de la 1 la 8 şi spune noua sumă, şi aşa mai departe. Câştigă jucătorul care obține suma 2007. Arătați că jucătorul *B* poate adopta o strategie de câştig sigur.

12. Un triunghi ascuțitunghic ABC are $m(\angle BAC) = 30^0$. Bisectoarea unghiului *BAC*, intersectează mediatoarea laturii *AB* în punctul *I*. Pe perpendiculara în *I* pe dreapta *AI* se consideră punctul *P* astfel încât $IP = IA$. Punctele *P* şi *C* se află de o parte şi de alta a dreptei *AI*.

a) Să se arate că triunghiul *PIB* este echilateral.

b) Dacă, în plus, $AI = BC$, să se arate că patrulaterul $BCIP$ este romb.

- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Fiecare subiect se notează de la 0 la 7.**
- **Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ “JOSE MARTI” EDIȚIA a VII-a, BUCUREŞTI - 12.01.2008

Clasa a VIII-a

13. Fie $n \in N$ şi $P = \frac{1}{n+1} - \frac{5}{n+5} + \frac{4}{n+6}$.

a) Să se arate că, oricare ar fi $n \in N$, numărul *P* se reprezintă ca fracție zecimală periodică.

b) Care este cea mai mică valoare a lui *n* pentru care numărul *P* se reprezintă ca fracție zecimală periodică simplă?

14. Pe o tablă sunt scrise numerele naturale consecutive de la 1 la 100. Doi elevi, *A* şi *B*, joacă următorul joc: pe rând, începând cu *A*, ei completează cele 99 de spații dintre oricare două numere consecutive cu semnele “+”, ”$-$” sau ”$\cdot$”. Dacă în final rezultatul obținut este număr impar, câştigă jucătorul care a completat ultimul spațiu rămas liber. Să se arate că jucătorul *A* poate adopta o strategie de câştig sigur.

15. Fie *m* şi *n* două numere naturale distincte. Să se arate că, dacă numărul $p = 2^m + 2^n$ este pătrat perfect, atunci $|m-n| = 3$.

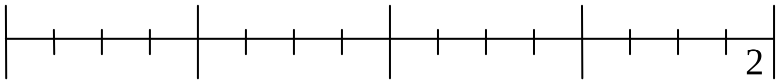
16. În paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ se dau $AB = 10\sqrt{7}$ cm, $BC = 24$ cm şi $AA' = 50$ cm. Fie punctul *M* situat pe segmentul (AA') astfel încât triunghiul $D'MC$ să fie dreptunghic. Să se calculeze distanța de la punctul C' la dreapta *MD*.

- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Fiecare subiect se notează de la 0 la 7.**
- **Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

Barem de corectare
Clasa a IV-a

1. a) $x : [\ 1 + (\ 9 - 1\ )\ ] = 8$
$x : 9 = 8$
$x = 8 \cdot 9$
$x = 72$

b)

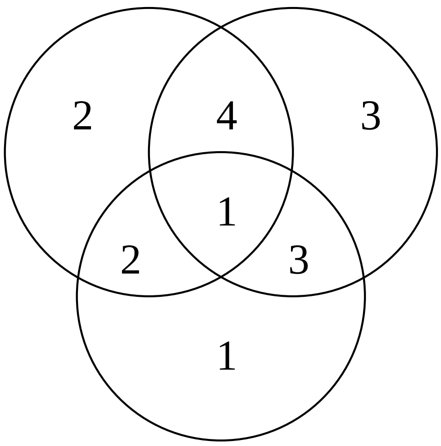


$16 \cdot 2 = 32$

2. $8 \cdot x = 14 \cdot y$
a) Cel mai mic numar care se imparte exact, atat la 8 cat si la 14 este 56
b) $56 = 8 \cdot 7$; $56 = 14 \cdot 4$

3. 1, 3, 5 sunt numere impare.
Adunari sau scaderi cu aceste numere au ca rezultat un numar impar.
2, 4, 6 sunt numere pare.
Adunari sau scaderi cu aceste numere au ca rezultat un numar par.
numar impar $\pm$ numar par = numar impar $\Rightarrow$
numar impar = 0 – fals

4.



a) 3
b) Au participat 1+4+3+2+2+3+1=16
Nu au participat 24 – 16 = 8

Baremul contine doar o rezolvare orientativa.

BAREM DE CORECTARE CLASA aV-a

1. $216 \cdot 144 - 144 \cdot 72 - 144 \cdot 144 \cdot 1 = 144(216 - 72 - 144) = 144(144 - 144) = 144 \cdot 0 = 0$

1p 2p 2p 1p 1p

2. n<2500 , n cel mai mare

n:x ; x∈ **N*** C=669, R = x-2, 1p

D=I$\cdot C + R, R < I$ 1p

n=$x \cdot 669 + x - 2$ 1p

n=$x \cdot 670 - 2$ 1p

n=$3 \cdot 670 - 2$ 1p

n=2010-2 1p

n=2008 1p

3.

$S_A - a + c = S_A - 4 \Leftrightarrow a - c = 4 \Rightarrow a \geq 5$ $2p$

$S_B - b + a = S_B - 5 \Leftrightarrow b - a = 5 \Rightarrow b \geq 5$ $2p$

1) $a = 5 \Rightarrow c = 1, b = 10$ (A) $2p$

2) $a = 6 \Rightarrow c = 2, b = 11$ (F) $1p$

4. $A = \{x \in N \mid 2^{2008} < x \leq 2^{2009}\}$

Card A=$2^{2009} - 2^{2008} + 1 - 1 = 2^{2008}(2 - 1) = 2^{2008}$ 2p

$B = \{y \in N \mid 3^{1338} \leq y < 3^{1339}\}$

Card B=$3^{1339} - 3^{1338} + 1 - 1 = 3^{1338}(3 - 1) = 3^{1338} \cdot 2$ 2p

(Card A):2=$2^{2007} = 2^{3 \cdot 669} = (2^3)^{669} = 8^{669}$ 1p

(Card B):2=$3^{1338} = 3^{2 \cdot 669} = (3^2)^{669} = 9^{669}$ 1p

Card A < Card B 1p

BAREM DE CORECTARE CLASA aVI-a

1. $20,7=\frac{2007}{100};2,0(08)=\frac{1988}{990};20,0(80)=\frac{1988}{99};0,669=\frac{669}{1000}$................................$3p$

$$10\cdot\frac{2007}{100}\cdot\frac{1988}{990}-30\cdot\frac{1988}{99}\cdot\frac{669}{1000}=\frac{2007\cdot 1988}{9900}-\frac{3\cdot 1988\cdot 669}{9900}=$$
$$=\frac{2007\cdot 1988}{9900}-\frac{1988\cdot 2007}{9900}=0$$ ....$4p$

2.
$\overline{abcd}$ $par, d\neq 0\Rightarrow d\in\{2,4,6,8\}$..$1p$
$\overline{abcd}+\overline{dcba}=10010\Rightarrow Uc(\overline{abcd}+\overline{dcba})=0\Rightarrow Uc(d+a)=0 si$ cum d,a $cifre\,nenule$
$\Rightarrow d+a=10$..$3p$
$\overline{abcd}+\overline{dcba}=1001(a+d)+110(b+c)=10010+110(b+c)\Rightarrow$
$b+c=0,$ b,c $cifre\Rightarrow b=c=0$...$2p$
$\overline{abcd}\in\{2008,4006,6004,8002\}$, *finalizare*..$1p$

3. a)
$n=0\Rightarrow$ int*re* 5^0 *si* 5^1 *sunt* *doar* 2^1 *si* 2^2.......................................$1p$
$n=1\Rightarrow$ int*re* 5^1 *si* 5^2 *sunt doar* 2^3 *si* 2^4..$1p$
$n=2\Rightarrow$ int*re* 5^2 *si* 5^3 *sunt* $2^5,2^6$..$1p$
$n=3\Rightarrow$ int*re* 5^3 *si* 5^4 *sunt* $2^7,2^8,2^9$...$1p$

b) Fie n numar natural oarecare si p cel mai mic numar natural cu proprietatea ca $5^n<2^p$.

$2^{p+3}=2^p\cdot 2^3=2^p\cdot 8>2^p\cdot 5>5^n\cdot 5\Rightarrow 2^{p+3}>5^{n+1}$.
Atunci int*re* 5^n *si* 5^{n+1} *se afla cel mult* 3 *puteri ale lui* 2 *sunt*
$2^p,2^{p+1},2^{p+2}$...$3p$

4. a) Fie E mijlocul lui [AB] $\Rightarrow$ AE=27,5……………………………………1p
$AM_1\in N, AM_i=AM_1+M_1M_2+...+M_{i-1}M_i, i=\overline{2,9}$ *si cum* $AM_1, M_1M_2,..., M_8M_9\in N\Rightarrow$
$\Rightarrow AM_i\in N, i=\overline{2,9}$...$2p$
Finalizare..$1p$

b)

$AM_1 = 9, M_1M_2 = 8, M_2M_3 = 3, M_3M_4 = 4, M_4M_5 = 7, M_5M_6 = 1, M_6M_7 = 2$

$M_7M_8 = 5, M_8M_9 = 6, M_9B = 10.$

$[M_4M_5]$ *si* $[AB]$ *au acelasi mijloc*..$3p$

BAREM DE CORECTARE
CLASA aVII-a

1. Justificarea corecta a primei inegalitati ……………………………………4p
   Justificarea corecta a celei de a doua inegalitati…………………………3p

2.
   $\overline{0,abc} \in \{0,667;0,668;...,0,833\}$...$2p$
   $Card\ M = 167$...$2p$
   Calculul sumei elementelor multimii M……………………………………2p
   Finalizare……………………………………………………………………1p

3.
   $2007 \vdots 9$...$2p$

   Jucatorul B poate completa orice numar al jucatorului A pana la multiplu de 9……3p
   Jucatorul B trebuie sa spuna numai numere multiplu de 9, prin urmare
   el va obtine 2007……………………………………………………………..2p

4. a) Triunghiul ΔIAB isoscel………………………………………………..1p
   Triunghiul ΔPIB isoscel………………………………………………...1p
   m($\angle PIB$)=60^0………………………………………………………….1p
   Finalizare……………………………………………………………………..1p
   b) Simetricul punctului C fata de dreapta AB este R, R$\in$ AP………………..1p
   RB=BC=PB, m($\angle$ARB)=75^0 ……………………………………………1p
   M($\angle$ACB)=75^0, finalizare…………………………………………………..1p

BAREM DE CORECTARE
CLASA a VIII-a

2. a) O fractie $\frac{a}{b}$ ireductibila este periodica (simpla sau mixta) daca b are in descompunerea sa in factori primi un factor prim diferit de 2 sau 5 ……………………………………1p

P=$\dfrac{20}{(n+1)(n+5)(n+6)}$ …………………………………………………………………..2p

Justificarea
$(n+1)(n+5)(n+6)\vdots 3$ ………………………………………………………….…………1p

20 nu este divizibil cu 3…………………………………………………………………...1p

b) Pentru n=0 atunci
P=$\frac{20}{30}=\frac{2}{3}=0,(6)$ ……………………………………………………...2p

2. De la 1 la 100 sunt 50 de numere pare si 50 de numere impare……………………….1p

Daca se pune ● intre doua numere consecutive, rezultatul este numar par iar unul dintre cele impare initiale „dispare"…………………….……………………………………2p

A are la dispozitie 50 de semne iar B 49 de semne .……………………………………1p

Strategia: A urmareste ca in final sa fie 49 de semne ●. Mai ramane un numar impar care $\pm$ un numar par se obtine ca rezultat un numar impar.

A pune primul $\pm$. Daca B pune $\pm$, atunci el continua cu ●, iar daca B pune ●, atunci el pune + sau - ………………………………………………………..............................3p

3. Fie n<m. Atunci $2^n+2^m=2^n(1+2^{m-n})$ si $1+2^{m-n}$ impar………………………………..2p

Daca $2^n(1+2^{m-n})$ este patrat perfect, atunci 2^n si $1+2^{m-n}$ sunt patrate perfecte………...1p m-n=3 (justificare)…………………………………………………………………..……4p

4. Aratam ca din $\Delta MCD'$ dreptunghic rezulta m($\angle CMD'$)=90^0 …………………………1p

Daca MA=x, din $\Delta MCD'$ dreptunghic in M se obtine $x^2-50x+576=0$ ……………...1p

$(x-25)^2-49=0 \Rightarrow (x-32)(x-18)=0 \Rightarrow x_1=32,\quad x_2=18$ …………………...1p

$A_{D'MD}=600cm^2$ (din aria dreptunghiului $ADD'A'$ se scad ariile triunghiurilor $A'MD$ si AMD) ……………………………………………………………………………………1p

Fie $D'H\perp MD,\quad H\in MD$.

$$\left.\begin{array}{l} C'D' \perp (ADD'A') \\ D'H \perp MD \\ D'H, \quad MD \subset (ADD'A') \end{array}\right\} \overset{t3\perp}{\Rightarrow} C'H \perp MD \Rightarrow d(C', MD) = C'H$$ ……….………………..1

p

Daca x=18, atunci $D'H = 40$ cm si

$C'H = 10\sqrt{23}$ cm…………………..……….1p

Daca x=32, atunci $D'H = 30$ cm si

$C'H = 40$ cm………………………………..1p

Observatie: Se poate arata ca $C'H = C'M$.