CLASA a VII-a VALCEA 2013

1 a) Arătaţi că $\dfrac{2k-1}{2k}<\dfrac{2k}{2k+1}$, oricare ar fi k număr natural nenul.

b) Fie $p=\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot 99}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 100}$. Aflaţi zecimea din scrierea zecimală a numărului p.

c) Arătaţi că $\dfrac{1}{2\sqrt{2013}}<\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\dfrac{4025}{4026}<\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{4026}}$.

2 a) Determinaţi numărul real a, ştiind că $\sqrt{5(a-6)^2}=20$. b) Calculaţi $\sqrt{8-2\sqrt{15}}+\sqrt{8+2\sqrt{15}}$.

c) Determinaţi numerele raţionale x şi y, astfel încât

$$\frac{\sqrt{25(x-6)^2-10\sqrt{1006009}}}{\sqrt{5}}-\frac{\sqrt{9(y+2)^2-30\sqrt{40401}}}{\sqrt{3}}=\sqrt{8-2\sqrt{15}}.$$

3 Fie patrulaterul convex $ABCD$ cu $AC\cap BD=\{O\}$ şi punctele E,F,M,N,P,R mijloacele segmentelor $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$, $[AC]$, respectiv, $[BD]$. Demonstraţi că:

a) Patrulaterul $MNEF$ este paralelogram. b) Dreptele ME, NF, PR sunt concurente.

c) $ON+OF=\dfrac{AD+BC}{2}\Leftrightarrow OE+OM=\dfrac{AB+CD}{2}$.

4 În triunghiul ABC cu $\sphericalangle B\equiv\sphericalangle C$, $[AD]$ este mediană cu $D\in(BC)$ şi $E\in(AB)$, astfel încât $CE\perp AB$. Fie $AD\cap CE=\{T\}$ şi $BT\cap AC=\{F\}$. Pe latura $[AC]$ există un punct G egal depărtat de AB şi BC. Să se arate că: a) $BC=2\cdot DF$;

b) $DE^2=\dfrac{BE\cdot AB}{2}$; c) $\dfrac{1}{CG}-\dfrac{1}{BC}=\dfrac{1}{AC}$.

CLASA a VIII-a

1 a) Fie $x,y,z\in\mathbb{R}$. Arătaţi că:

$$(x+y+z)^2+(x+y-z)^2+(x-y+z)^2+(-x+y+z)^2=4x^2+4y^2+4z^2$$

b) Demonstraţi că numărul $4024^2+4026^2+4028^2$ se poate scrie ca o sumă de patru numere naturale pătrate perfecte.

c) Dacă $a=2^{2013}$, $b=3^{2013}$ *şi* $c=6^{-2013}$, atunci arătaţi că: $\dfrac{1}{ab+a+1}+\dfrac{1}{bc+b+1}+\dfrac{1}{ca+c+1}=1$.

2 a) Să se demonstreze că $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca,\ \forall a,b,c\in\mathbb{R}$.

b) Demonstraţi că $\dfrac{x^2}{a}+\dfrac{y^2}{b}\geq\dfrac{(x+y)^2}{a+b}$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$ şi $\forall a,b\in\mathbb{R}_+$.

c) Arătaţi că $\dfrac{x^3}{y^2(x+2z)}+\dfrac{y^3}{z^2(y+2x)}+\dfrac{z^3}{x^2(z+2y)}\geq 1,\forall x,y,z\in\mathbb{R}_+$.

3 Pe planul dreptunghiului $ABCD$ se ridică perpendiculara MA. Distanţele AM, AB şi AD sunt direct proporţionale cu numerele $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, respectiv $\sqrt{6}$, iar distanţa de la punctul M la dreapta BD este egală cu $8\,cm$.

a) Aflaţi măsura unghiului dintre planele (MBD) şi (ABC).

b) Demonstraţi că dreapta BD şi $(MAD)\cap(MBC)$ sunt drepte necoplanare.

c) Aflaţi distanţa de la punctul C la planul (MBD).

4 În paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ notăm cu $M,N,$ respectiv P, proiecţiile punctului C pe dreptele AB', AD', respectiv $B'D'$. Demonstraţi că:

a) AC', BD' *şi* $A'C$ sunt concurente. b) $BM\perp AB'$.

c) Dreptele AP, $B'N$ şi $D'M$ sunt concurente.