Concursul Interjudeţean de Matematică Traian Lalescu
Ediţia a XXII-a, Deva, 28-30 Martie 2008
Clasa a VII-a

1. Fie $M = \{1, 2, \ldots, 2007, 2008\}$ mulţimea tuturor numerelor naturale nenule mai mici sau egale cu 2008. Mulţimea M se modifică succesiv, înlocuind câteva elemente ale sale cu restul sumei lor la împărţirea prin 29. Dacă la un moment dat avem că $M = \{x, 2007\}$, să se determine x.

M.Chiş

2. Fie ΔABC un triunghi oarecare, iar $M \in (BC)$, $N \in (CA)$ şi $P \in (AB)$ mijloacele laturilor sale. Dacă O_a, O_b, O_c sunt centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor ΔANP, ΔBMP, ΔCMN, să se arate că
a) dreptele AO_a, BO_b şi CO_c sunt concurente;
b) triunghiurile $\Delta O_aO_bO_c$ şi ΔABC sunt asemenea.

M.Chiş

3. Fie $a, b, c, d > 0$, $t = b + c + d$, $u = c + d + a$, $v = d + a + b$, $w = a + b + c$ şi

$$E = \frac{a}{b+c+d} + \frac{b}{c+d+a} + \frac{c}{d+a+b} + \frac{d}{a+b+c}\,.$$

a) Determinaţi numere raţionale $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{Q}$ astfel încât

$$a = \alpha t + \beta u + \gamma v + \delta w.$$

b) Exprimaţi E în funcţie de t, u, v, w.
c) Arătaţi că

$$E \geq \frac{4}{3}\,.$$

M.Chiş

4. Fie $A_1A_2\ldots A_{24}$ un poligon regulat cu 24 de laturi, iar $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \{A_1, A_2, \ldots, A_{24}\}$ două submulţimi ale mulţimii vârfurilor poligonului formate din câte 5 vârfuri. Arătaţi că există câte două puncte in cele două mulţimi $M, N \in \mathcal{A}$ şi $P, Q \in \mathcal{B}$ astfel încât $[MN] \equiv [PQ]$.

M.Chiş

Notă: Timp de lucru 3 ore.