

**CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ  
„GHEORGHE LAZĂR” SIBIU  
Ediția a X-a, 20-22 martie 2009**

**Clasa a VII-a**

1) Fie  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ . Să se arate că dacă numerele  $n$ ,  $n^2 + n + 1$  și  $n^3 + n^2 + n + 4$ , sunt simultan prime atunci și numerele  $n^4 - 2$  și  $n^5 - 2$  sunt prime.

*Emil C. Popa, Sibiu*

2) Se consideră  $A = 2\sqrt{2 + \sqrt{3}} - \sqrt{9 - 2\sqrt{18}} - \sqrt{3}$ . Arătați că  $A^{2008} - 16$  se divide cu 255.

*Ioan Țincu, Sibiu*

3) În paralelogramul  $ABCD$  se consideră un punct  $M$  pe dreapta  $CD$ , diferit de  $C$  și  $D$ . Dreptele  $AM$  și  $BC$  se intersectează în  $N$ . Să se arate că triunghiurile  $DMN$  și  $BCM$  au aceeași arie.

GM 12/2008

4) a) Să se arate că pentru orice  $x$  real strict pozitiv are loc egalitatea:

$$1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2} = \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)^2.$$

b) Demonstrați inegalitatea:

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{1}{2008^2} + \frac{1}{2009^2}} < \\ < \frac{1}{2} \left(2009 - \frac{1}{2009}\right) \end{aligned}$$

*Dumitru Barac, Sibiu*

**Clasa a VIII-a**

1) Fie  $a, b, c \in (0, \infty)$  astfel ca  $b^2 < ac$  și  $c^2 < ab$ . Să se demonstreze că

$$\frac{bc}{ac - b^2} + \frac{ac}{ab - c^2} \geq \frac{4ab}{a^2 - bc}.$$

*Emil C. Popa, Sibiu*

2) Se consideră două funcții  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  care satisfac relațiile:

$$\begin{aligned} f(x-1) &= 2x - 3 + g(1) - f(1); \\ g(x-1) &= 4x + 5 - g(1) - f(1), \end{aligned}$$

pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ .

a) Determinați funcțiile  $f$  și  $g$ .

b) Aflați, dacă există, punctul de intersecție al graficelor celor două funcții.

*Gazeta Matematică, nr.12/2008*

3) Fie  $a_n = n^7 - n$ , pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$ . Să se afle cel mai mare divizor comun al numerelor  $a_1, a_2, \dots, a_n$ ,  $n \geq 3$ .

*Mugur Acu, Sibiu*

4) Considerăm un cub cu muchia de lungime  $\sqrt{47}$ .

a) Să se arate că în interiorul cubului există cel puțin trei puncte  $M, N, P$  astfel încât  $MN = NP = PM = \sqrt{53}$ .

b) Fie  $ABC$  un triunghi echilateral de latură  $AB = \sqrt{53}$  situat în interiorul cubului. Să se arate că există un punct  $K$  în exteriorul cubului astfel încât piramida  $ABCK$  să aibă toate muchiile de lungimi egale.

*Dumitru Barac, Sibiu*