

## Clasa a VIII-a – barem de corectare

1) Fie  $a, b, c \in (0, \infty)$  astfel ca  $b^2 < ac$  și  $c^2 < ab$ . Să se demonstreze că

$$\frac{bc}{ac - b^2} + \frac{ac}{ab - c^2} \geq \frac{4ab}{a^2 - bc}.$$

Inegalitatea de demonstrat se scrie  $\frac{1}{\frac{a}{b} - \frac{b}{c}} + \frac{1}{\frac{b}{c} - \frac{c}{a}} \geq \frac{4}{\frac{a}{b} - \frac{c}{a}}$  ..... 2p

Notăm  $x = \frac{a}{b} - \frac{b}{c} > 0$ ,  $y = \frac{b}{c} - \frac{c}{a} > 0$  ..... 1p

și inegalitatea devine:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}, \quad \frac{x+y}{xy} \geq \frac{4}{x+y} \dots\dots\dots 2p$$

$$(x+y)^2 \geq 4xy, \quad (x-y)^2 \geq 0 \dots\dots\dots 2p$$

**TOTAL** ..... 7p

2) Se consideră două funcții  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  care satisfac relațiile:

$$f(x-1) = 2x - 3 + g(1) - f(1); \quad \text{pentru orice } x \in \mathbb{R}.$$

$$g(x-1) = 4x + 5 - g(1) - f(1),$$

a) Determinați funcțiile  $f$  și  $g$ .

b) Aflați, dacă există, punctul de intersecție al graficelor celor două funcții.

a) Înlocuind  $x$  cu  $x+1$ , obținem

$$(1) \quad \begin{cases} f(x) = 2x - 1 + g(1) - f(1) \\ g(x) = 4x + 9 - g(1) - f(1) \end{cases} \dots\dots\dots 3p$$

$$\text{de unde } \begin{cases} f(1) = 1 + g(1) - f(1) \\ g(1) = 13 - g(1) - f(1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(1) = 3 \\ g(1) = 5 \end{cases} \dots\dots\dots 2p$$

Deci, din (1), rezultă  $f(x) = 2x + 1$ ,  $g(x) = 4x + 1$  ..... 1p

b)  $\begin{cases} 2x + 1 = y \\ 4x + 1 = y \end{cases}$  . Așadar  $M(0, 1)$  este punctul de intersecție a graficelor. .... 1p

**TOTAL** ..... 7p

3) Fie  $a_n = n^7 - n$ , pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$ . Să se afle cel mai mare divizor comun al numerelor  $a_1, a_2, \dots, a_n, n \geq 3$ .

Avem  $a_n = (n - 1)n(n + 1)(n^2 - n + 1)(n^2 + n + 1) \dots \dots \dots 0,5p$

$a_1 = 0, a_2 = 1 \cdot 2 \cdot 3^2 \cdot 7, a_3 = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 13$  și deci  $(a_2, a_3) = 42 \dots \dots \dots 1,5p$

Se arată că  $a_n : 42$  pentru orice  $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ :

- cum  $(n - 1)n(n + 1) = M 6$ , trebuie să mai demonstrăm că

$a_n : 7$  pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$ ;  $\dots \dots \dots 2p$

- scriem  $n = 7k + r, k \in \mathbb{N}, r = 0, 1, \dots, 6$ , și se consideră pe rând cele 7 cazuri... 2p

Așadar,  $a_n : 42$  pentru orice  $n \geq 1$ , ca urmare  $(a_1, a_2, \dots, a_n) = 42. \dots \dots \dots 1p$

**TOTAL**  $\dots \dots \dots 7p$

4) Considerăm un cub cu muchia de lungime  $\sqrt{47}$ .

a) Să se arate că în interiorul cubului există cel puțin trei puncte  $M, N, P$  astfel încât  $MN = NP = PM = \sqrt{53}$ .

b) Fie  $ABC$  un triunghi echilateral de latură  $AB = \sqrt{53}$  situat în interiorul cubului. Să se arate că există un punct  $K$  în exteriorul cubului astfel încât piramida  $ABCK$  să aibă toate muchiile de lungimi egale.

a) Vom înscrie un triunghi echilateral de latură  $\sqrt{53}$  în secțiunea diagonală a cubului, aceasta fiind un dreptunghi de lungime  $\sqrt{94}$  și lățime  $\sqrt{47} \dots \dots \dots 1p$

Acest lucru este posibil deoarece latura, respectiv înălțimea, triunghiului este mai mică decât lungimea, resp. lățimea, secțiunii.  $\dots \dots \dots 2p$

b) Construim cele două tetraedre regulate  $ABCD$  și  $ABCE$  situate de o parte și de alta lui  $[ABC]$ . Avem

$$DE = 2 \cdot \frac{AB\sqrt{6}}{3} = 2 \cdot \frac{\sqrt{53} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{424}{3}} \dots \dots \dots 1,5p$$

Diagonala cubului este  $\sqrt{47} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{\frac{423}{3}} < DE \dots \dots \dots 1,5p$

Rezultă că  $D$  și  $E$  nu se pot afla simultan în interiorul sau pe fețele cubului. Fie  $K$  acela dintre punctele  $D, E$  aflat în exteriorul cubului  $\dots \dots \dots 1p$

**TOTAL**  $\dots \dots \dots 7p$