Liceul Teoretic „**Alexandru Papiu Ilarian**”

Dej jud. Cluj

Concursul de matematică „*Leon Birnbaum*”

Ediția a IV-a 23 mai 2014

<u>Clasa a IV-a</u>

1. Şapte numere consecutive, scrise în ordine crescătoare, au suma 252.
Care este numărul scris în mijloc?

Olimpiada Bangladesh, 2009

2. Trei numere au suma 975. Dacă din fiecare se scade un număr a, se obţin respectiv rezultatele 12, 345, 126. Aflaţi cele trei numere.

Manual de matematică pentru clasa a IV-a, 1981

3. Un caiet, trei creioane şi şapte rigle costă 169 lei, iar patru caiete, trei creioane şi o riglă costă 91 lei.
Cât costă împreună un caiet, un creion şi o riglă ?

prof. Vasile Albu, Dej, R.M.T. nr.2 /1984

Timp de lucru: 75 minute

Succes!

Liceul Teoretic „**Alexandru Papiu Ilarian**”

Dej jud. Cluj

Concursul de matematică „Leon Birnbaum”

Ediția a IV-a 23 mai 2014

<u>Clasa a V-a</u>

1. Şapte nasturi şi stofa pentru o rochie au costat în total 168 lei. Preţul nasturilor reprezintă $\frac{1}{7}$ din preţul stofei.

   Cât costă un nasture?

   Manual de matematică pentru clasa a IV-a, 1983

2. Preţul a trei stilouri este egal cu preţul a cinci creioane. O carte costă cât un stilou şi un creion la un loc.

   Câte cărţi pot fi cumpărate cu preţul total a nouă creioane şi al unui stilou ?

   prof. Vasile Albu, Dej, Gazeta Matematică nr. 2 / 2002

3. Aflaţi cel mai mic număr natural care începe cu cifra 2, ştiind că mutând această cifră la sfârşit se obţine un număr de 3 ori mai mare decât numărul iniţial.

   Olimpiada Bangladesh, 2007

Timp de lucru: 75 minute

Succes!

http://concursbirnbaum.wordpress.com/

Liceul Teoretic „**Alexandru Papiu Ilarian**”

Dej jud. Cluj

Concursul de matematică „*Leon Birnbaum*”

Ediția a IV-a 23 mai 2014

<u>Clasa a VI-a</u>

1. Numerele naturale a, $3a$ și $6a$ au proprietatea că produsul lor P este divizibil cu suma lor S.

   Arătați ca numărul natural $\frac{P}{S}$ este divizibil cu 45.

   Manual de matematică clasa a V-a, 1983, enunț parțial

2. În triunghiul ABC dreptunghic în A ducem bisectoarea CE, $E\in AB$, înălțimea AF, $F\in BC$ și $EM\perp BC$, $M\in BC$. Notăm N intersecția dreptelor CE și AF.

   Arătați că $MN \parallel AB$.

   prof. Vasile Albu, Dej, R.M.T. 1-2 / 1989

3. Jumătate dintr-un teren a fost împărțit între trei frați, o treime din teren s-a împărțit între două surori, iar mama a primit trei sferturi din restul terenului. Ceea ce a rămas a fost donat pentru construcția unei școli, valoarea terenului donat fiind 70.000 taka*.

   Aflați care a fost valoarea întregului teren.

   *„taka” este moneda națională din Bangladesh

   Olimpiada Bangladesh 2008

Timp de lucru: 75 minute

Succes!

http://concursbirnbaum.wordpress.com/

Liceul Teoretic „**Alexandru Papiu Ilarian**”

Dej jud. Cluj

Concursul de matematică „*Leon Birnbaum*”

Ediția a IV-a 23 mai 2014

<u>Clasa a VII-a</u>

1. Rezolvați ecuația cu necunoscuta x:

$$\frac{a-b}{x+1}-\frac{a+b}{x-1}=0$$

Manual de matematică clasa a VII-a 1980

2. Stabiliți dacă există numerele $a,b\in \mathbf{N}^*$ astfel încât:

$$2003a+2004b=2003\cdot 2004$$

prof. Giurgiu Gheorghe, Dej, R.M.T. nr.3 / 2004

3. Trapezul ABDC are bazele CD=9 m și AB=3 m. Înălțimea are lungimea 4 m, iar $AD\perp CD$.

   Calculați aria triunghiului AEC, unde E este intersecția dreptelor AD și BC.

Olimpiada Bangladesh 2010, enunț adaptat

Timp de lucru: 75 minute

Succes!

http://concursbirnbaum.wordpress.com/

Liceul Teoretic „**Alexandru Papiu Ilarian**"

Dej jud. Cluj

Concursul de matematică „*Leon Birnbaum*"

Ediția a IV-a 23 mai 2014

<u>Clasa a VIII-a</u>

1. Aflaţi suma primilor 140 de termeni ai sumei:

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - 6^2 + \ldots$$

Olimpiada Bangladesh 2007

2. Trapezul ABCD cu bazele [AB] şi [CD] nu este isoscel.

   Demonstraţi egalitatea:

$$\frac{AC^2 - BD^2}{AD^2 - BC^2} = \frac{AB + CD}{AB - CD}$$

prof. Dorin Andrica, Dej, R.M.T. nr. 1-2 / 1980

3. Intr-un tetraedru regulat SABC, cu muchia de lungime a, se consideră punctele $P \in [SC]$ şi $Q \in [SB]$, astfel încât $SP = 2 \cdot PC$ şi $SQ = 2 \cdot QB$.

   Calculaţi aria triunghiului APQ.

Manual de matematică clasa a VIII-a, 1981

Timp de lucru: 75 minute

Succes!

http://concursbirnbaum.wordpress.com/

Concursul de matematică „*Leon Birnbaum*"

23 mai 2014

Soluţii şi barem de corectare clasa a IV-a

1.	Fie a, a+1, a+2, a+3, a+4, a+5, a+6 cele şapte numere	2p
	a+(a+1)+(a+2)+(a+3)+(a+4)+(a+5)+(a+6)=252	3p
	7a+21=252	2p
	a=33	2p
	Numărul din mijloc este 36	1p
2.	Cele trei numere pot fi scrise a+12, a+345, a+126	2p
	Se scrie egalitatea (a+12)+ (a+345)+(a+126)=975	2p
	Se obţine 3a+483=975	2p
	a=164	2p
	Numerele iniţiale sunt 176, 509, 290	2p
3.	Fie a, b, c respectiv preţul unui caiet, al unui creion şi al unei rigle	1p
	$a+3b+7c=169$	2p
	$4a+3b+c=91$	2p
	Dublând a doua egalitate se obţine $8a+6b+2c=182$	2p
	Adunând această egalitate cu prima se obţine $9a+9b+9c=351$	2p
	Împărţind această egalitate la 9 se obţine $a+b+c=39$	1p

Notă: Oricare altă soluţie corectă se punctează corespunzător.

Concursul de matematică „Leon Birnbaum"

23 mai 2014

Soluții și barem de corectare clasa a V-a

1.	Fie x prețul nasturilor	1p
	Prețul stofei este 7x	2p
	7x+x=168	3p
	x=21	3p
	Prețul unui nasture este 21:7=3 lei	1p
2.	Fie a, b, c prețul respectiv al unui stilou, al unui creion și al unei cărți	1p
	$3a=5b$	2p
	$c=a+b$	2p
	$a+9b=a+b+8b=$	2p
	$=c+8b=c+5b+3b=$	1p
	$=c+3a+3b=c+3c=4c$	2p
3.	Fie x numărul format din cifrele situate după 2 la numărul inițial	1p
	Numărul inițial are forma 2000…0+x	1p
	Mutând cifra 2 la sfârșit este 10x+2	1p
	Se scrie ecuația 10x+2=3· (2000…0+x)	2p
	Se obține 7x=6000…0-2	2p
	Cea mai mică soluție este pentru cazul 7x=599998	1p
	x=85714	1p
	Numărul inițial este 285714	1p

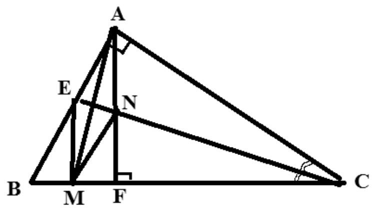
Notă: Oricare altă soluție corectă se punctează corespunzător.

Concursul de matematică „Leon Birnbaum”

23 mai 2014

Soluții și barem de corectare clasa a VI-a

1.	Fie $S = a + 3a + 6a = 10a$	2p
	$P = a \cdot 3a \cdot 6a = 18a^3$	2p
	Deoarece P se divide cu S, se poate scrie $18a^3 = k \cdot 10a$	1p
	Se obține $9a^2 = 5k$	1p
	Numărul k este divizibil cu 9 (*)	1p
	Numărul a este divizibil cu 5, deci	1p
	a^2 se divide cu 25, deci k se divide cu 5 (**)	1p
	Din (*) și (**) se obține că k este divizibil cu 45	1p



2.	Figura	2p
	Δ CEA≡Δ CEM (cazul I.U.)	2p
	Δ CAM este isoscel cu vârful C	1p
	CE fiind bisectoare, rezultă $CE \perp AM$	2p
	N este ortocentru în Δ ACM, deci $MN \perp AC$	2p
	Deoarece și $BA \perp AC$, se obține MN||AB	1p

3.	Notăm x valoarea întregului teren	1p
	Frații au primit $\frac{x}{2}$	1p
	Surorile au primit $\frac{x}{3}$	1p
	Mama a primit $\frac{3}{4} \cdot (x - \frac{x}{2} - \frac{x}{3}) =$	2p
	$= \frac{3}{4} \cdot \frac{6x - 3x - 2x}{6} = \frac{3}{4} \cdot \frac{x}{6} = \frac{x}{8}$	2p
	Partea donată este $x - \frac{x}{2} - \frac{x}{3} - \frac{x}{8} = \frac{x}{24}$	2p
	Deoarece $\frac{x}{24} = 70.000$, x=1.680.000 taka	1p

<u>Notă:</u> Oricare altă soluție corectă se punctează corespunzător.

Concursul de matematică „Leon Birnbaum”

23 mai 2014

Soluţii şi barem de corectare clasa a VII-a

1. $\frac{a-b}{x+1}=\frac{a+b}{x-1}$ 2p

$ax-bx-a+b=ax+bx+a+b$ 3p

$-2bx=2a$ 3p

$x=-\frac{a}{b}$ 2p

2. Deoarece 2003a şi membrul drept se divid cu 2003, se obţine că b se divide cu 2003 2p

b=2003k

Înlocuind se obţine $2003a+2003\cdot 2004k=2003\cdot 2004$ 2p

Împărţind egalitatea cu 2003 se obţine a+2004k=2004 1p

Singurele posibilităţi sunt

a) a=0 , k=1, ceea ce nu convine 2p

b) a=2004, k=0, ceea ce conduce la b=0, deci nu convine 2p

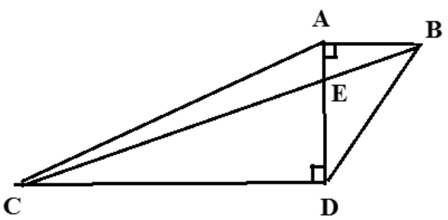
În consecinţă, nu există o astfel de pereche a, b. 1p

3. Figura 2p

Triunghiurile BAE şi CDE sunt asemenea (U.U.) 1p

Notăm AE=x 1p

$\frac{x}{4-x}=\frac{3}{9}$ 2p



x=1 2p

$\frac{AE\cdot CD}{2}=$ 1p

$\frac{1\cdot 9}{2}=4{,}5m^2$ 1p

Notă: Oricare altă soluţie corectă se punctează corespunzător.

Concursul de matematică „*Leon Birnbaum*"

24 mai 2013

Soluţii şi barem de corectare clasa a VIII-a

1. $1^2-2^2+3^2-4^2+5^2-6^2+\ldots+139^2-140^2=$ 1p

$(1-2)(1+2)+(3-4)(3+4)+(5-6)(5+6)+\ldots+(139-140)(139+140)=$ 2p

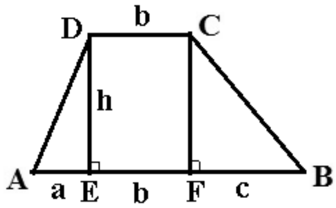
$-1\cdot3-1\cdot7-1\cdot11-\ldots-1\cdot279=$ 2p

$-(3+7+11+\ldots+279)=$ 2p

$-(4\cdot1-1+4\cdot2-1+4\cdot3-1+\ldots+4\cdot70-1)=$ 1p

$-(4\cdot\frac{70\cdot71}{2}-70)=-9870$ 2p

2. Ducem înălţimile CF şi DE 1p



Notăm AE=a, EF=CD=b, FB=c, DE=CF=h 1p

Trebuie arătat că $\frac{AC^2-BD^2}{AD^2-BC^2}=\frac{a+b+c+b}{a+b+c-b}=\frac{a+2b+c}{a+c}$ 1p

$AC^2=(a+b)^2+h^2$ 0,5p

$BD^2=(b+c)^2+h^2$ 0,5p

$AD^2=a^2+h^2$ 0,5p

$BC^2=c^2+h^2$ 0,5p

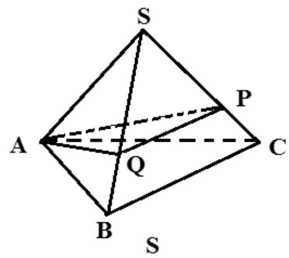
$\frac{AC^2-BD^2}{AD^2-BC^2}=\frac{(a+b)^2+h^2-[(b+c)^2+h^2]}{(a+h)^2-(c+h)^2}=$ 1p

$=\frac{a^2+2ab+b^2+h^2-b^2-2bc-c^2-h^2}{a^2+2ah+h^2-c^2-2ch-h^2}=$ 1p

$=\frac{a^2+2ab-2bc-c^2}{a^2-c^2}=\frac{(a-c)(a+c)+2b(a-c)}{(a-c)(a+c)}=$ 2p

$=\frac{(a-c)(a+c+2b)}{(a-c)(a+c)}=\frac{a+2b+c}{a+c}$ 1p

3. Figura

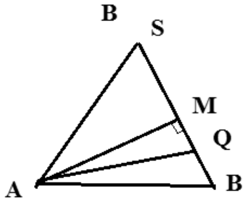


$\frac{SP}{PC}=\frac{SQ}{QB}=2$ 1p

Din reciproca teoremei lui Thales se obţine că PQ||BC 1p

Deoarece $\Delta SPQ\sim\Delta SCB$, $\frac{PQ}{a}=\frac{2}{3}$, $PQ=\frac{2a}{3}$ 1p

Calculăm AQ. Ducem înălţimea AM în Δ ASB 0,5p

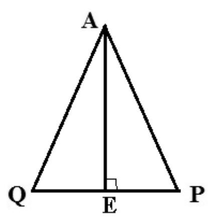


$AM=\frac{a\sqrt{3}}{2}$ 0,5p

$BQ=\frac{a}{3}$ 0,5p

$MQ=\frac{a}{2}-\frac{a}{3}=\frac{a}{6}$ 1p

$AQ=\sqrt{(\frac{a\sqrt{3}}{2})^2+(\frac{a}{6})^2}=\frac{a\sqrt{7}}{3}$ 1p



Ducem înălţimea AE în Δ AQP isoscel; $PE=\frac{a}{3}$ 0,5p

$AE=\sqrt{(\frac{a\sqrt{7}}{3})^2-(\frac{a}{3})^2}=\frac{a\sqrt{6}}{3}$ 1p

Aria Δ APQ este $\frac{PQ\cdot AE}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2a}{3}\cdot\frac{a\sqrt{6}}{3}=\frac{a^2\sqrt{6}}{9}$ 1p

Notă: Oricare altă soluţie corectă se punctează corespunzător.