

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapa locală

12 februarie 2011

Clasa a VIII-a

1. a) Demonstrați că:

$$2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}), \text{ unde } n \text{ este număr natural nenul.}$$

b) Fie $A = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - 2\sqrt{5}$. Arătați că $A \in (-2; 0)$.

S:E10352, Supliment Gazeta Matematică, Decembrie 2010

c) Fie a și b numere naturale nenule astfel încât $[a; b] \cap \mathbf{N}$ conține exact trei numere naturale, dintre care unul singur este impar. Arătați că $\sqrt{a+b}$ și $\sqrt{a \cdot b}$ sunt numere iraționale.

S:E10354, Supliment Gazeta Matematică, Decembrie 2010

2. a) Să se determine cel mai mic, respectiv cel mai mare număr natural de forma \overline{abc} , știind că $3(a+b+c) = a \cdot b \cdot c$.

Prof. Gherasim Gheorghe

b) Demonstrați că pentru orice x și y numere reale pozitive are loc relația $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$.

c) Arătați că $x^2y + xy^2 + x^2z + y^2z + z^2y + z^2x \geq 6xyz$, pentru x, y, z reale pozitive.

Prof. Mic Vasile, prof. Zetea Bogdan

3. Fie a, b, c , respectiv lungimile laturilor BC, AC și AB ale triunghiului ABC , care îndeplinesc condiția: $\sqrt{a^2 - 4a + 13} + \sqrt{b^2 - 2\sqrt{3}b + 19} + \sqrt{c^2 - 2c + 26} \leq 12$.

a) Arătați că $\sqrt{(a-2)^2 + 9} \geq 3$, pentru orice a număr real.

b) Determinați natura triunghiului ABC .

c) Dacă a, b, c sunt exprimate în cm, să se determine lungimea segmentului AM știind că

$$AM \perp (ABC) \text{ și aria suprafeței triunghiulare } MBC \text{ este } \frac{3\sqrt{7}}{2} \text{ cm}^2.$$

Prof. Ilie Ella

4. Pe planul pătratului $ABCD$ cu $AB=3 \text{ cm}$, de aceeași parte a planului, se duc perpendicularele BN, CP, DQ .

a) Să se determine lungimea segmentului CP știind că $BN=2 \text{ cm}$, $DQ=4 \text{ cm}$ și punctele A, N, P și Q sunt coplanare.

b) Determinați poziția punctului M pe perpendiculară în A pe planul (ABC) dacă $BN=2 \text{ cm}$, $CP=8 \text{ cm}$, $DQ=4 \text{ cm}$ și punctele M, N, P, Q sunt coplanare.

Prof. Ilie Ella

Notă:

1. Toate subiectele sunt obligatorii.
2. Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.
3. Timp de lucru: 3 ore.

Subiectele au fost propuse și selectate de către:

Prof. Ienuțaș Vasile Școala George Coșbuc Baia Mare,

Prof. Ilie Ella Școala Nicolae Iorga, Baia Mare,

Prof. Vele Alexandru Grup Școlar Târgu Lăpuș,

Prof. Zetea Bogdan Școala George Coșbuc, Sighetu Marmăției