2014

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

"GRIGORE MOISIL", ORADEA, EDIŢIA A XXXIX-A *A XXIX-A*

Clasa a V-a

1) Arătaţi că nu există numere naturale a, b, c astfel încât
$$a^4 + b^4 + c^4 = 2014.$$

2) Aflaţi cea mică şi cea mai mare valoare pe care o poate avea produsul a 10 numere naturale distincte a căror sumă este 57.

3) O mulţime de numere naturale se numeşte *aniversară* dacă suma elementelor sale este 2014. Câte submulţimi *aniversare* are mulţimea $\{9, 10, 11, 12, ..., 64\}$?

4) Numerele naturale de la 1 la 2014 sunt scrise într-un şir în următoarea ordine: mai întâi sunt scrise, în ordine crescătoare, numerele care au suma cifrelor 1; urmează, tot în ordine crescătoare, numerele care au suma cifrelor 2 apoi, în ordine crescătoare, cele cu suma cifrelor 3, etc.

Primii cinci termeni ai şirului sunt: 1, 10, 100, 1000, 2.

a) Care este al 15-lea termen?

b) Ce număr stă înaintea numărului 199 în acest şir?

c) Pe ce e loc se află în şir numărul 999?

Clasa a VI-a

1) Între Andrei şi Cristi, elevi în clasa a VI-a, a avut loc următorul dialog:

"A: Azi am demonstrat o proprietate interesantă a numărului 2014: există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât n are exact patru divizori naturali, iar suma acestor divizori este cu 2014 mai mare decât n.

C: Înseamnă că 2011 este prim..."

Cum a dedus Cristi că 2011 este prim?

2) Aflaţi cel mai mic număr natural care are produsul cifrelor 6^{11}.

3) Tom şi Jerry scriu succesiv pe tablă, după plac, una din cifrele 1, 2 sau 4 (nu neapărat aceeaşi cifră de fiecare dată). Prima cifră o scrie Tom, apoi Jerry scrie o cifră după cea scrisă de Tom, a treia cifră o scrie Tom, ş.a.m.d., până se obţine un număr de 9 cifre. Tom câştigă dacă numărul de 9 cifre este multiplu de 4, iar Jerry câştigă dacă numărul de 9 cifre nu este multiplu de 3.

Demonstraţi că, indiferent de jocul adversarului, atât Tom cât şi Jerry îşi pot alege cifrele astfel încât să iasă câştigători. Descrieţi strategiile folosite de cei doi pentru a câştiga.

4) În triunghiul ABC bisectoarea $[BL]$ şi înălţimea $[AA']$ se intersectează în punctul Q. Notăm cu M punctul de intersecţie a dreptelor CQ şi AB. Ştiind că M este mijlocul laturii $[AB]$ şi că $AQ = BQ$, demonstraţi că:

a) $QM \perp AB$.

b) $AB = BC = CA$.

2014

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ "GRIGORE MOISIL", ORADEA, EDIŢIA A XXIX-A

Clasa a VII-a

1) Aflaţi numerele naturale n cu proprietatea că niciunul din numerele $n, 3n$ nu conţine (în scrierea în baza 10) vreuna din cifrele 1, 2 sau 9.

2) Aflaţi numerele $n \in \mathbb{N}^*$ şi $k \in \mathbb{N}$ cu proprietatea că $\sqrt{n}$ este număr raţional, iar $\sqrt{n+1}, \sqrt{n+2}, ..., \sqrt{2n}, \sqrt{2n+1}, ..., \sqrt{2n+k}$ sunt iraţionale.

3) Notăm cu M şi N mijloacele laturilor $[DC]$ şi $[BC]$ ale paralelogramului $ABCD$.

Este posibil ca $[AM]$ şi $[AN]$ să împartă unghiul $\angle BAD$ în trei părţi egale?

4) Trapezul $ABCD$ cu baza mare $[AB]$ are diagonalele perpendiculare. Paralela la baze prin punctul de intersecţie a diagonalelor intersectează laturile neparalele $[AD]$ şi $[BC]$ respectiv în P şi Q, iar pe $[AD]$ se consideră punctul U astfel încât $AU = DP$.

Demonstraţi egalitatea $QU = AD$.

Clasa a VIII-a

1) Fie $$\mathcal{A} = \{(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid a^2 + ab + b^2 \leq \frac{3}{4}\}.$$

Pentru fiecare pereche $(a, b) \in \mathcal{A}$ se consideră suma $a + b$. Aflaţi cea mai mică şi cea mai mare valoare pe care o poate lua această sumă.

2) Spunem că o mulţime nevidă $\mathcal{M} \subset \mathbb{N}$ este "liberă de sume" dacă suma oricăror două elemente ale lui $\mathcal{M}$ (nu neapărat distincte) nu este un element al lui $\mathcal{M}$.

Aflaţi toate numerele $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care mulţimea $\{1, 2, ..., n\}$ poate fi partiţionată în două submulţimi libere de sume.

3) a) Fie a un număr real. Găsiţi o distribuţie a semnelor $\pm$ astfel încât $\pm a^2 \pm (a+1)^2 \pm (a+2)^2 \pm (a+3)^2 = 4$.

b) Aflaţi cel mai mic număr natural n pentru care există o alegere a semnelor $\pm$ astfel încât $\pm 1^2 \pm 2^2 \pm ... \pm n^2 = 0$.

c) Se poate face o alegere a semnelor $\pm$ astfel încât
$$\pm 1^2 \pm 2^2 \pm ... \pm 2014^2 = 0?$$
Dar astfel încât $\pm 1^2 \pm 2^2 \pm ... \pm 2015^2 = 0$?

4) Pe perpendiculara în A pe planul dreptunghiului $ABCD$ se consideră un punct M. Fie E, F proiecţiile lui A respectiv pe MB, MD, iar G proiecţia lui E pe MC.

a) Demonstraţi că $FG \perp MC$ şi că $AEGF$ este un patrulater inscriptibil.

b) Aflaţi măsurile unghiurilor patrulaterului $AEGF$ în cazul când $ABCD$ este pătrat, iar $MA = AB$.