CLASA A VIII-A - barem de corectare

Problema 1. *Soluţie.* Fie $x = a^2+2a-3$, $y = a^2-2a-15$, deci $x+y = 2a^2-18 = 2(a^2-9)$. **1p**

Relaţia din enunţ devine $x^3+y^3 = (x+y)^3$, adică $(x+y)\cdot(x^2-xy+y^2) = (x+y)^3$. **1p**

Rezultă că $x+y=0$ sau $x^2-xy+y^2 = (x+y)^2$, echivalent cu $xy=0$. **1p**

Dacă $x+y=0$, avem $a^2-9=0$, de unde $a \in \{\pm 3\}$. **1p**

Dacă $xy=0$, obţinem $(a^2+2a-3)\cdot(a^2-2a-15)=0$ **1p**

adică $(a+3)(a-1)(a-5)(a+3)=0$, de unde $a \in \{-3;1;5\}$. **1p**

În final, $a \in \{\pm 3;1;5\}$. **1p**

Problema 2. *Soluţie.* Demonstrăm că $MN \geq \dfrac{MB+BN}{\sqrt{2}}$, echivalent cu $2MN^2 \geq (MB+BN)^2$ sau $2(MB^2+BN^2) \geq MB^2+2MB\cdot BN+BN^2$, adică $(MB-BN)^2 \geq 0$. **3p**

Analog, $NP \geq \dfrac{NC+CP}{\sqrt{2}}$, $PQ \geq \dfrac{PD+DQ}{\sqrt{2}}$ şi $QM \geq \dfrac{QA+AM}{\sqrt{2}}$. **2p**

Însumând relaţiile de mai sus obţinem $P_{MNPQ} \geq \dfrac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$. **2p**

Problema 3. *Soluţie.* Avem, conform teoremei împărţirii cu rest, $ab = 36k+r$, unde $k \in \mathbb{N}$ şi $r \in \mathbb{N}, r < 36$. **1p**

Dacă numărul $x^{ab} = \left(x^{36}\right)^k \cdot x^r \in A$ este raţional, rezultă că $r=0$. Dacă şi $k=0$, atunci $ab=0$, fals. **2p**

Deci $ab = 36k, k \geq 1$, adică $a(36-a) = 36k$, sau $a^2 = 36(a-k)$. **1p**

Înseamnă că 6 îl divide pe a, adică $a \in \{6;12;18;24;30\}$. **1p**

Obţinem 3 elemente diferite pentru $(a;b) \in \{(6;30),(12;24),(18;18)\}$. **2p**

şi anume x^{180}, x^{288} şi x^{324}.

Problema 4. *Soluţie.* Fie D simetricul lui C faţă de A, rezultă că $ADA'C'$ este paralelogram, deci $A'D \parallel C'A$. Astfel $\sphericalangle(AC';A'B) = \sphericalangle DA'B$. **1p**

Fie E simetricul lui B faţă de mijlocul lui (AC). Rezultă că $B'C \parallel A'E$ şi $\sphericalangle(B'C;A'B) = \sphericalangle BA'E$. **1p**

De asemeni, $\sphericalangle(B'C;C'A) = \sphericalangle(A'E;A'D) = \sphericalangle DA'E$. Prin urmare, în piramida $A'DBE$, $m(\sphericalangle DA'B) = m(\sphericalangle BA'E) = m(\sphericalangle DA'E) = 90^o$ şi cum $A'A \perp (DBE)$, rezultă că A este ortocentrul ΔDBE. **2p**

Cum A este centrul de greutate al triunghiului DBE (DO mediană şi $AD = 2AO$). Rezultă că triunghiul ΔDBE este echilateral, deci $AD = AB = AE$ sau $AC = AB = BC$. **2p**

Notând $AB = BC = CA = l$ şi $AA' = h$, din ΔDBC dreptunghic în B, $BD = l\sqrt{3}$. Rezultă că $A'D = A'B = l\sqrt{\dfrac{3}{2}}$. Din $\Delta AA'B$, $AA'^2 = \dfrac{l^2}{2}$, deci $AA' = \dfrac{l}{\sqrt{2}}$. În concluzie $AC = AB = BC = AA'\sqrt{2}$. **1p**