## CLASA a VIII-a – BAREMURI

1. **Soluţie**

Adunând membru cu membru inegalităţile $x+y+z\le t$, $-2x^2-2y^2-2z^2\le -2t$ şi $x^3+y^3+z^3\le t$, obţinem că $x(1-x)^2+y(1-y)^2+z(1-z)^2\le 0$ .............................. **3 p**
Cum $x,y,z\in[0,\infty)$, rezultă că $x,y,z\in\{0,1\}$ ........................ **2 p**

Dacă $x=y=z=0$ rezultă $t=0$.
Dacă exact două dintre numerele $x,y,z$ sunt nule, atunci $1\le t$ şi $1\ge t$, prin urmare $t=1$, $(x,y,z)\in\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$.
Dacă exact unul dintre numerele $x,y,z$ este nul, atunci $2\le t$ şi $2\ge t$, deci $t=2$, $(x,y,z)\in\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$.
Dacă $x=y=z=1$, deducem că $t=3$ .............................. **2 p**

2. **Soluţie**

**a)** Măcar unul dintre numerele $a,b,c$ are modulul cel puţin egal cu 2, prin urmare $a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2\ge 1\cdot 1+1\cdot 4+1\cdot 4=9$ ..................... **3 p**

**b)** Inegalitatea de demonstrat revine succesiv la
$ab+ac+bc-2(a+b+c)+3\ge 6\Leftrightarrow ab+ac+bc-3\ge 2(a+b+c)\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (ab+ac+bc-3)(ab+ac+bc+3)\ge 2abc(a+b+c)\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (ab+ac+bc)^2-9\ge 2abc(a+b+c)\Leftrightarrow a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2\ge 9$, adică tocmai relaţia demonstrată la **a)** ...................................... **4 p**

3. **Soluţie**

Fie $M$ mijlocul muchiei $[BC]$ . Deoarece triunghiul $VBC$ este isoscel cu $VB=VC$ , rezultă că punctele $V,H,I$ şi $M$ sunt coliniare. Se demonstrează că $AH\perp(VBC)$ , deci $AH\perp VM$ . ................................ **2 p**
Fie $I'$ proiecţia punctului $O$ pe planul $(VBC)$; atunci $I'\in VM$ şi $OI'\parallel AH$. Din teorema fundamentală a asemănării obţinem $\frac{OI'}{AH}=\frac{MO}{MA}=\frac{1}{3}$, deci $AH=3\cdot OI'$. Dacă $I\ne I'$ , atunci $\frac{AH}{3}=OI'<OI=\frac{AH}{3}$, fals. Rămâne că $I=I'$. .................................................... **2 p**
Cum $OI\perp(VBC)$ şi $I$ este centrul cercului înscris în triunghiul $VBC$, rezultă că $O$ este egal depărtat de $VB$ şi $BC$. .............................. **1 p**
Fie $J$ proiecţia punctului $O$ pe dreapta $VB$. Atunci $OJ=OM$ , deci triunghiurile dreptunghice $OJB$ şi $OMB$ sunt congruente. (I. C.) Rezultă că $m\left(\widehat{VB,(ABC)}\right)=m(\angle VBO)=m(\angle MBO)=30^\circ$ . ................ **2 p**

4. **Soluţie**

**a)** Un exemplu corect. ........................................... **2 p**

**b)** Fie $n$ un număr tipic şi $S(n)$ suma cifrelor sale, cu $S(n)=M2011$. Se demonstrează că $n$ are un multiplu de forma $m=\underbrace{99...9}_{l}\underbrace{00...0}_{k}$, despre care să presupunem că este număr tipic, adică $9l=M2011$ . ............... **3 p**
Numărul $M=\left(10^{l+1}-1\right)\cdot m=10^{l+1}\cdot m-m=\underbrace{99...9}_{l-1}89\underbrace{00...0}_{l-1}1\underbrace{00...0}_{k}$ este multiplu al lui $m$ (deci şi al lui $n$) şi are suma cifrelor $S(m)+9\ne M2011$. În concluzie, nu există un număr tipic ai cărui multipli să fie toţi tipici. **2 p**