Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa finală, Neptun – Mangalia, 13 aprilie 2009

CLASA a VII-a

Problema 1. Considerăm triunghiurile ABC şi $A_1B_1C_1$ cu $AB = A_1B_1$, $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1 = 60^\circ$ şi $\angle ABC + \angle A_1B_1C_1 = 180^\circ$. Să se arate că

$$\frac{1}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{A_1C_1}.$$

Problema 2. Un pătrat de latură 5 se împarte în 25 de pătrate de latură 1. În fiecare pătrat unitate se scrie câte un număr real strict pozitiv şi mai mic decât 1, astfel încât:

- suma numerelor de pe fiecare linie este un număr natural;
- suma numerelor de pe fiecare coloană este un număr natural;
- suma celor 25 de numere este egală cu 11.

a) Să se arate că cel puţin unul dintre cele 25 de numere este mai mare sau egal decât $\frac{3}{5}$. √

b) Dacă un singur număr dintre cele 25 de numere este mai mare decât $\frac{3}{5}$, să se arate că sumele numerelor de pe linia şi coloana ce îl conţin sunt egale.

Problema 3. a) Fie m, n numere naturale nenule, $m > 1$. Să se arate că numărul $m^4 + 4n^4$ nu este prim.

b) Să se arate că numărul $3^{4^5} + 4^{5^6}$ se descompune în produs de doi factori numere naturale, fiecare mai mare decât 10^{2009}.

Problema 4. Fie ABC un triunghi ascuţitunghic şi fie D un punct în interiorul triunghiului astfel încât $\angle ADB - \angle ACB = 90^\circ$ şi $AC \cdot BD = AD \cdot BC$.

a) Să se calculeze suma măsurilor unghiurilor $\angle DAC$ şi $\angle DBC$.

b) Să se calculeze $\dfrac{AB \cdot CD}{AC \cdot BD}$.

Timp de lucru 3 ore + 1/2 oră pentru întrebări lămuritoare asupra enunţurilor
Fiecare problemă este punctată de la 0 la 7 puncte

Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Inovării
Societatea de Ştiinţe Matematice din România
Inspectoratul Şcolar Judeţean Constanţa

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa finală, Neptun – Mangalia, 13 aprilie 2009

CLASA a VIII-a

Problema 1. Să se determine numerele naturale n ce satisfac simultan proprietăţile:

a) câtul împărţirii lui n la 9 este un număr natural de trei cifre, toate cele trei cifre fiind egale;

b) câtul împărţirii lui $n + 36$ la 4 este un număr natural de patru cifre, cifrele fiind 2, 0, 0, 9, nu neapărat în această ordine.

Problema 2. De o parte şi de alta a planului triunghiului ABC se consideră punctele S şi P astfel încât $SA = SB = SC$ şi $PA \perp PB \perp PC \perp PA$. Ştiind că volumul piramidei $PABC$ este egal cu dublul volumului piramidei $SABC$, să se arate că dreapta SP trece prin centrul de greutate al triunghiului ABC.

Problema 3. Pentru numerele reale a, b, c notăm $x = |a| + |b| + |c|$ şi $y = |a-2| + |b-2| + |c-2|$.

a) Să se arate că $x + y \geq 6$.

b) Ştiind că a, b, $c \in [-1, 3]$ şi că media aritmetică a numerelor a, b, c este 1, să se arate că $x + y \leq 10$.

Problema 4. Prin plane paralele la feţele sale, un cub se împarte în 27 de paralelipipede dreptunghice, dintre care exact două sunt cuburi. Să se arate că cele două cuburi au muchii de lungimi egale.

Timp de lucru 3 ore + 1/2 oră pentru întrebări lămuritoare asupra enunţurilor
Fiecare problemă este punctată de la 0 la 7 puncte