

INSPECTORATUL ȘCOLAR AL JUDEȚULUI OLT

**OLIMPIADA DE MATEMATICA
FAZA LOCALA**

12 februarie 2011

Clasa a V-a

SUBIECTUL		BAREM DE CORECTARE	PUNCTAJ TOTAL
1	a	Prin verificare directă: $7^2 \cdot 41 = 2009$	2p
	b	Folosim a) : $2011 = 2009 + 2 = 7^2 \cdot (1^2 + 2^2 + 6^2) + 2 \cdot 1^2 =$ $= 7^2 + 14^2 + 42^2 + 2 \cdot 1^2$ Notând: $a = 7$; $b = 14$; $c = 42$ și $d = 1$, obținem afirmația din enunț.	1p 2p 2p
2		Notăm $d = (a, b)$, deci $d = (3^n \cdot 5^{n+1} + 3, 3^{n+1} \cdot 5^n + 2)$	1p
		$d/3^n \cdot 5^{n+1} + 3 \Leftrightarrow d/5 \cdot 15^n + 3$ $d/3^{n+1} \cdot 5^n + 2 \Leftrightarrow d/3 \cdot 15^n + 2$ } \Rightarrow	2p
		$d/15 \cdot 15^n + 9$ } $\Rightarrow d/(15 \cdot 15^n + 10 - 15 \cdot 15^n - 9)$ $d/15 \cdot 15^n + 10$ }	2p
		$\Rightarrow d/1 \Rightarrow d = 1$. Cum $(a, b) = 1$, rezultă că numerele a și b sunt prime între ele.	1p 1p
3	a	$T_1 = 3 \cdot 1 + 1, T_2 = 3 \cdot 2 + 1, T_3 = 3 \cdot 3 + 1, \dots, T_k = 3 \cdot k + 1, k \in \mathbb{N}$ $T_{2011} = 3 \cdot 2011 + 1 = 6034, T_{201} = 3 \cdot 201 + 1 = 604 \Rightarrow T_{2011} - T_{201} = 5430$	1p 2p
	b	Termenii șirului divizibili cu 5 sunt: $T_3 = T_{5 \cdot 0 + 3}, T_8 = T_{5 \cdot 1 + 3}, T_{13} = T_{5 \cdot 2 + 3}, T_{18} = T_{5 \cdot 3 + 3}, \dots$ Al 2011-lea termen al șirului divizibil cu 5 va fi: $T_{5 \cdot 2010 + 3} = T_{10053}$. Suma căutată $S = T_3 + T_8 + T_{13} + \dots + T_{10053} =$ $= (3 \cdot 3 + 1) + (3 \cdot 8 + 1) + (3 \cdot 13 + 1) + \dots + (3 \cdot 10053 + 1) =$ $(15 \cdot 0 + 10) + (15 \cdot 1 + 10) + (15 \cdot 2 + 10) + \dots + (15 \cdot 2010 + 10) =$ $= 15 \cdot (0 + 1 + 2 + \dots + 2010) + \underbrace{10 + 10 + 10 + \dots + 10}_{\text{de 2011 ori}} = 30335935$	1p 1p 2p
4		$\overline{ab} + a + b = n^2 \Leftrightarrow 11a + 2b = n^2$ Cum $a \in \{1, 2, 3, \dots, 9\}, b \in \{0, 1, 2, 3, \dots, 9\}$ putem scrie $11 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \leq 11a + 2b \leq 11 \cdot 9 + 2 \cdot 9 \Leftrightarrow 11 \leq 11a + 2b \leq 117$ Deci $11a + 2b = n^2 \in \{16, 25, 36, 49, 64, 81, 100\}$ Se obține $(a, b) = \{(1, 7); (2, 7); (3, 8); (7, 2); (8, 6)\}$	1p 1p 2p 1p 2p

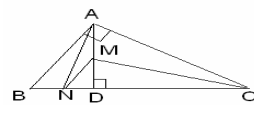
INSPECTORATUL ȘCOLAR AL JUDEȚULUI OLT

**OLIMPIADA DE MATEMATICA
FAZA LOCALA**

12 februarie 2011

Clasa a VI-a

SUBIECTUL		BAREM DE CORECTARE	PUNCTAJ TOTAL
1		$a = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{80} \right) \Leftrightarrow a = \frac{13}{80}$ $x = 260 \cdot \frac{80}{13} \Leftrightarrow x = 1600$ $x = 2^6 \cdot 5^2$ Numărul divizorilor lui x este $(6+1) \cdot (2+1) = 21$	<p>3p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>2p</p>
2		Notăm $a = 2011^n \cdot 2012^{n+1} + 2011$, $b = 2011^{n+1} \cdot 2012^n + 2010$ $(a; b) = d$, $d \in \mathbb{N}^*$. Avem $d a$ și $d b$ Din $d a$, $d b$ și $d (2011a - 2012b) \Rightarrow$ $\Rightarrow d (2011^2 - 2010 \cdot 2012) \Rightarrow d [2011^2 - (2011^2 - 1)] \Rightarrow d 1$ Din $d 1$ și $d \in \mathbb{N}^* \Rightarrow d=1$. Deci fracția este ireductibilă	<p>1p</p> <p>1p</p> <p>3p</p> <p>1p</p> <p>1p</p>
3	a	Desenul cu unghiurile adiacente. Completarea desenului cu cele trei bisectoare. $m(\sphericalangle MBE) = 2m(\sphericalangle ABF)$. $3m(\sphericalangle EBF) + m(\sphericalangle ABC) = 165^\circ$. $m(\sphericalangle CBD) = 120^\circ$.	<p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p>
	b	$m(\sphericalangle ABM) = 90^\circ \Rightarrow \sphericalangle ABM$ unghi drept	1p
	c	$m(\sphericalangle ABD) = 150^\circ \neq 180^\circ \Rightarrow \sphericalangle ABD$ nu este alungit, deci semidreptele nu sunt opuse.	1p
4	a	$4016016 = 2004^2$. Aria pătratului este $x^2 = 2004^2 \cdot y^2$, deci $x = 2004y$. Din enunț avem $x^2 - 4007 \cdot y^2 = 4006^2 \Leftrightarrow (2004 \cdot y)^2 - 4007 \cdot y^2 = 4006^2 \Leftrightarrow y^2 = \frac{4006^2}{4012009}$ $y^2 = 4 \Leftrightarrow y = 2$	<p>1p</p> <p>2p</p>
	b	Căutăm $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $2^n < 2004^2$. $2004^2 = 4016016$, iar $2^{21} = 2097152$, $2^{22} = 4194304$ rezultă că pătratele vopsite cu alb sunt cele cu numerele $1 = 2^0, 2^1, 2^2, \dots, 2^{21}$, deci în total 22 pătrate vopsite cu alb. Sunt $2004 - 22 = 1982$ pătrate albastre	<p>2p</p> <p>2p</p>

SUBIECTUL	BAREM DE CORECTARE	PUNCTAJ TOTAL
1	a) Prin calcul direct $(n+2) \cdot (n-1)^2 = n^3 - 3n + 2$ sau $n^3 - 3n + 2 = n^3 + 2n^2 - 2n^2 - 4n + n + 2 = n^2(n+2) - 2n(n+2) + (n+2) = (n+2)(n-1)^2$	1p
	b) Fie $d \in \mathbb{N}^*$, $d = (n+2, (n-1)^2)$, avem $\begin{cases} d/(n+2) \\ d/(n^2-2n+1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d/(n^2+2n) \\ d/(n^2-2n+1) \end{cases} \Rightarrow d/(-4n+1)$ $\begin{cases} d/(n+2) \\ d/(-4n+1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d/(4n+8) \\ d/(-4n+1) \end{cases} \Rightarrow d/9 \Rightarrow d \in \{1, 3, 9\}$	1p 2p
	c) Din $7/A \Rightarrow 7/(n+2)(n-1)^2$; deoarece 7 este număr prim obținem $7/(n+2)$ sau $7/(n-1)^2 \Leftrightarrow 7/(n+2)$ sau $7/(n-1)$ Obținem $n+2=7k, k \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow n=7k-2, k \in \mathbb{N}^*$ sau $n-1=7q, q \in \mathbb{N} \Leftrightarrow n=7q+1, q \in \mathbb{N}$. Deci $n \in \{7k-2, k \in \mathbb{N}^*\} \cup \{7q+1, q \in \mathbb{N}\}$	1p 2p
2	$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2011} \Leftrightarrow 2011 \cdot x + 2011 \cdot y = x \cdot y \Leftrightarrow y = \frac{2011 \cdot x}{x-2011}, x \neq 2011$	1p
	$y \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \begin{cases} (x-2011)/2011 \cdot x \\ (x-2011)/(x-2011) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2011)/2011 \cdot x \\ (x-2011)/(2011 \cdot x - 2011^2) \end{cases} \Leftrightarrow$	2p
	$(x-2011)/2011^2 \Leftrightarrow x-2011 \in \{1, 2011, 2011^2\} \Leftrightarrow x \in \{2012, 4022, 4046132\}$. Deci $(x, y) \in \{(2012, 4046132); (4022, 4022); (4046132, 2012)\}$	2p
3	a) Din $AM//CD$ și $AM=CD$ rezultă că $AMCD$ este paralelogram, deci $CM=DA$. Dar $CM = \frac{AB}{2}$ deoarece $DA = \frac{AB}{2} \Rightarrow \Delta CAB$ este dreptunghic în C.	3p
	b) $MB//CD$ și $MB=CD$ rezultă că $MBCD$ este paralelogram, deci $PC=PM$ și $PB=PD$. Cum P e mijlocul lui $[MC] \Rightarrow [BP]$ este mediană în ΔMBC , deci $A_{\Delta PMB} = \frac{A_{\Delta MBC}}{2}$ [CM] este mediană în ΔCAB , deci $A_{\Delta CMA} = A_{\Delta CMB} = 2 \cdot A_{\Delta PMB}$ (1) Dar $A_{\Delta CMA} = A_{\Delta CAD}$, deoarece triunghiurile sunt congruente \Rightarrow $\Rightarrow A_{\Delta CAD} = 2 \cdot A_{\Delta PMB}$ (2). Din relațiile (1) și (2) avem: $A_{ABCD} = A_{\Delta CAD} + A_{\Delta CMA} + A_{\Delta CMB} \Rightarrow A_{ABCD} = 6 \cdot A_{\Delta PMB} \Rightarrow A_{\Delta PMB} = \frac{A_{ABCD}}{6}$	
4	În ΔABC , $m(\angle BAC) = 90^\circ$, $AD \perp BC, D \in (BC) \Rightarrow$ $\Rightarrow m(\angle ABD) = m(\angle DAC) = 90^\circ - m(\angle BAD)$  Din $m(\angle ADB) = m(\angle BAC) = 90^\circ$ și $\angle B$ comun $\xrightarrow{U.U.} \Delta ADB \sim \Delta CAB \Rightarrow$ $\Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{BD}{AB} \Rightarrow \frac{AD}{BD} = \frac{AC}{AB}$ (1) " \Rightarrow " În ΔADB din $MN//AB \xrightarrow{T.Thales} \frac{AM}{AD} = \frac{BN}{BD} \Rightarrow \frac{AM}{BN} = \frac{AD}{BD}$ (2) 1p	

Din (1) și (2) $\Rightarrow \frac{AM}{BN} = \frac{AC}{AB}$ (3) Din (3) și $\angle ABN \equiv \angle CAM \xrightarrow{L.U.L.} \Delta ABN \sim \Delta CAM \Rightarrow \angle BAN \equiv \angle ACM$ 1p
 \Leftrightarrow Din $\angle ABN \equiv \angle CAM$ și $\angle BAN \equiv \angle ACM \xrightarrow{U.U.} \Delta ABN \sim \Delta CAM \Rightarrow \frac{AM}{BN} = \frac{AC}{AB}$ (4) 1p
 Din (1) și (4) $\Rightarrow \frac{AD}{BD} = \frac{AM}{BN} \Rightarrow \frac{BD}{AD} = \frac{BN}{AM} \xrightarrow{T.Thales} MN//AB$ 1p

SUBIECTUL	BAREM DE CORECTARE	PUNCTAJ TOTAL	
1	$x = [x] + \{x\} \Rightarrow 4044121\{x\}^2 - 4022\{x\} - 4040101[x] + 1 = 0$ $(2011\{x\} - 1)^2 = 4040101[x] \quad (1) \quad \text{Dar } 0 \leq \{x\} < 1 \Rightarrow 0 \leq 2011\{x\} < 2011$ $\Rightarrow 2011\{x\} - 1 < 2010 \Rightarrow (2011\{x\} - 1)^2 < 4040100$ $\text{Deci } \left. \begin{array}{l} 4040101[x] < 4010100 \\ 4040101[x] \geq 0 \text{ din (1)} \end{array} \right\} \Rightarrow [x] = 0$ $\text{Deci } 2011\{x\} - 1 = 0 \Rightarrow \{x\} = \frac{1}{2011} \Rightarrow x = \frac{1}{2011}$	<p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>2p</p> <p>1p</p>	
2	$ 5 - 2\sqrt{6} = 5 - 2\sqrt{6}, \quad 4 - 2\sqrt{6} = 2\sqrt{6} - 4 \Rightarrow x + \frac{25}{ x } + 4 y + \frac{1}{16 y } \leq 11$ $ x + \frac{25}{ x } \geq 10, \quad 4 y + \frac{1}{16 y } \geq 1 \quad (\text{avem formula } a+b \geq 2\sqrt{ab}, \quad a, b \in \mathbb{Q}^*)$ <p>Folosind aceste inegalități și inegalitatea din enunț avem</p> $ x + \frac{25}{ x } + 4 y + \frac{1}{16 y } = 11 \Leftrightarrow x - 10 + \frac{25}{ x } + 4 y - 1 + \frac{1}{16 y } = 0 \Leftrightarrow$ $\frac{(x - 5)^2}{ x } + \frac{(8 y - 1)^2}{16 y } = 0 \Leftrightarrow x = 5, \quad y = \frac{1}{8} \quad \cdot 8 \cdot \sqrt{2011 \left(x^2 - y^2 + \frac{103}{16} \right)} = 2011 \in \mathbb{N}$	<p>1p</p> <p>1p</p> <p>2p</p> <p>2p</p> <p>1p</p>	
3	<p>Cum ABCD este paralelogram și $AC \cap BD = \{O\} \Rightarrow OA = OC, OB = OD$</p>	1p	
	<p>În $\triangle AMC$ din $m(\angle AMC) = 90^\circ$ și $OA = OC \Rightarrow OM = OA = OC = \frac{AC}{2}$</p> <p>În $\triangle MBD$ avem $OB = OD = \frac{BD}{2}$, conform formulei medianei avem:</p> $MO^2 = \frac{2 \cdot (MB^2 + MD^2) - BD^2}{4} \Rightarrow AC^2 + BD^2 = 2 \cdot (MB^2 + MD^2)$ <p>Știm că $2 \cdot (a^2 + b^2) \geq (a+b)^2$, oricare ar fi $a, b \in \mathbb{R}$, egalitatea are loc pentru $a=b$.</p> <p>Deci $2 \cdot (MB^2 + MD^2) \geq (MB+MD)^2$, egalitatea are loc pentru $MB=MD$.</p> <p>Deci $AC^2 + BD^2 \geq (MB+MD)^2$, egalitatea are loc pentru $MB=MD$</p>	<p>1p</p> <p>2p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p>	
4	a	<p>Calculul distanței de la D la EF: $\frac{\sqrt{7}a}{2}$ Aria triunghiului DEF este $\frac{\sqrt{7}a^2}{4}$</p>	1p 1p
	b	<p>$AD \perp (ABE), \{O\} = DE \cap CF, DCEF$ paralelogram, $\{Q\} = AE \cap BF$ iar QO linie mijlocie în $\triangle ADE$ rezultă $QO \perp (ABE)$ iar $d(O, (ABE)) = QO = \frac{AD}{2} = \frac{a}{2}$</p> <p>$ME \perp AB$, M aparține segmentului AB și $ME \perp (ABC)$, construim $ON \perp DM$, N aparține dreptei DM iar $ON // ME, ON \perp (ABC)$ atunci</p> $d(O, (ABC)) = ON = \frac{ME}{2} = \frac{\sqrt{3}a}{4} \quad \frac{a}{2} > \frac{\sqrt{3}a}{4}, \text{ deci } d(O, (ABE)) > d(O, (ABC))$	<p>1p</p> <p>1p</p>
	c	<p>Completarea figurii cu paralelipipedul drept AB EFDCTP atunci $\angle(BD, AE) = \angle(PE, AE) = \angle PEQ$, unde $PE // BD$</p> <p>În $\triangle PQE, m(\angle EQP) = 90^\circ, \cos(\angle PEQ) = \frac{QE}{PE} = \frac{\sqrt{2}}{4}$</p>	<p>1p</p> <p>1p</p>
		-	