

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa finală, Neptun – Mangalia, 13 aprilie 2009

CLASA A VII-a, SOLUȚII ȘI BAREMURI

Problema 1. Considerăm triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$ cu $AB = A_1B_1$, $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1 = 60^\circ$ și $\angle ABC + \angle A_1B_1C_1 = 180^\circ$. Să se arate că

$$\frac{1}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{A_1C_1}.$$

Soluție Alipim cele două triunghiuri astfel încât laturile egale să coincidă ($A = A_1$ și $B = B_1$) iar dreapta AB să despartă punctele C și C_1 .

..... **2 puncte**

Deoarece $\angle ABC + \angle A_1B_1C_1 = 180^\circ$, punctele B , C și C_1 sunt coliniare.

..... **1 punct**

Fie $D \in (CA_1)$ astfel încât $C_1D \parallel AB$. Din teorema fundamentală a asemănării avem

$$\frac{DC_1}{AB} = \frac{CD}{CA}.$$

..... **2 puncte**

Triunghiul ADC_1 este echilateral, deoarece $\angle DAC_1 = \angle AC_1D = 60^\circ$.

..... **1 puncte**

Atunci $\frac{AC_1}{AB} = \frac{AC + AC_1}{AC}$, de unde

$$\frac{1}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{A_1C_1}.$$

..... **1 punct**

Problema 2. Un pătrat de latură 5 se împarte în 25 de pătrate de latură 1. În fiecare pătrat unitate se scrie câte un număr strict pozitiv și mai mic decât 1, astfel încât:

- suma numerelor de pe fiecare linie este un număr natural;
- suma numerelor de pe fiecare coloană este un număr natural;
- suma celor 25 de numere este egală cu 11.

a) Să se arate că cel puțin unul dintre cele 25 de numere este mai mare sau egal decât $\frac{3}{5}$.

b) Dacă un singur număr dintre cele 25 de numere este mai mare decât $\frac{3}{5}$, să se arate că sumele numerelor de pe linia și coloana ce îl conțin sunt egale.

Soluție. a) Presupunem că toate numerele sunt mai mici strict decât $\frac{3}{5}$. Atunci suma numerelor pe fiecare linie este strict mai mică decât $5 \cdot \frac{3}{5} = 3$, deci cel mult egală cu 2.

..... **2 puncte**

De aici rezultă că suma tuturor numerelor este mai mică decât $5 \cdot 2 = 10$, contradicție.

..... **1 punct**

b) Suma numerelor de pe linia, respectiv coloana ce conține numărul maxim este mai mică decât $4 \cdot 0,6 + 1 = 3,4$, deci cel mult egală cu 3.

..... **2 puncte**

Pe celelalte 4 linii și pe celelalte 4 coloane suma este maxim 2, iar $11 > 2 \cdot 5$, deci există o linie și o coloană cu suma numerelor măcar 3, anume chiar cele ce conțin numărul maxim.

..... **2 puncte**

Problema 3. a) Fie m, n numere naturale nenule, $m > 1$. Să se arate că numărul $m^4 + 4n^4$ nu este prim.

b) Să se arate că numărul $3^{4^5} + 4^{5^6}$ se descompune în produs de doi factori, fiecare mai mare decât 10^{2009} .

Soluție. a) Avem

$$m^4 + 4n^4 = m^4 + 4n^4 + 4m^2n^2 - 4m^2n^2 = (m^2 + 2n^2)^2 - (2mn)^2$$

..... **1 punct**

$$= (m^2 + 2n^2 + 2mn)(m^2 + 2n^2 - 2mn)$$

..... **1 punct**

Cum $m^2 + 2n^2 + 2mn > m^2 + 2n^2 - 2mn = n^2 + (m - n)^2 > 1$, rezultă cerința

..... **1 punct**

b) Pentru $m = 3^{4^4}$ și $n = 4^{\frac{5^6-1}{4}} = 4^{3906}$ avem descompunerea

$$3^{4^5} + 4^{5^6} = [(3^{256} - 4^{3906})^2 + (4^{3906})^2][(3^{256} + 4^{3906})^2 + (4^{3906})^2].$$

..... **2 puncte**

Cum $4^{3906} > 4^{3900} = 1024^{780} > 1000^{780} = 10^{2340}$, rezultă că $(4^{3906})^2 > 10^{2009}$, deci ambii factori ai descompunerii sunt mai mari decât 10^{2009} .

..... **2 puncte**

Problema 4. Fie ABC un triunghi ascuțitunghic și fie D un punct în interiorul triunghiului astfel încât $\angle ADB - \angle ACB = 90^\circ$ și $AC \cdot BD = AD \cdot BC$.

a) Să se calculeze suma măsurilor unghiurilor $\angle DAC$ și $\angle DBC$.

b) Să se calculeze $\frac{AB \cdot CD}{AC \cdot BD}$.

Soluție. a) Avem

$$\angle DAC + \angle DBC = 180^\circ - \angle ADC - \angle ACD + 180^\circ - \angle BDC - \angle BCD =$$

$$\dots\dots\dots \mathbf{1 \text{ punct}}$$

$$= [360^\circ - (\angle ADC + \angle BDC)] - \angle ACB = \angle ADB - \angle ACB = 90^\circ.$$

$$\dots\dots\dots \mathbf{2 \text{ puncte}}$$

b) Considerăm punctul E în interiorul unghiului $\angle ADB$ cu proprietatea că $DE = BD$ și $\angle BDE = 90^\circ$. Atunci $\angle ADE = \angle ACB$.

Din ipoteză avem $\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BD}$, ceea ce se scrie $\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{DE}$. De aici rezultă asemănarea triunghiurilor ACB și ADE .

$$\dots\dots\dots \mathbf{2 \text{ puncte}}$$

Obținem $\angle EAD = \angle BAC$ și $\frac{AC}{AD} = \frac{AB}{AE}$, ceea ce implică asemănarea triunghiurilor ABE și ACD .

$$\dots\dots\dots \mathbf{1 \text{ punct}}$$

Urmează

$$\frac{AB \cdot CD}{AC \cdot BD} = \frac{BE}{CD} \cdot \frac{CD}{BD} = \frac{BE}{BD} = \frac{BD\sqrt{2}}{BD} = \sqrt{2}.$$

$$\dots\dots\dots \mathbf{1 \text{ punct}}$$

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa finală, Neptun – Mangalia, 13 aprilie 2009

CLASA a VIII-a, SOLUȚII ȘI BAREMURI

Problema 1. Să se determine numerele naturale n ce satisfac simultan proprietățile:

a) câtul împărțirii lui n la 9 este un număr natural de trei cifre, toate cele trei cifre fiind egale;

b) câtul împărțirii lui $n + 36$ la 4 este un număr natural de patru cifre, cifrele fiind 2, 0, 0, 9, nu neapărat în această ordine.

Soluție Avem $n = 9 \cdot 111 \cdot a + r$, unde $a \in \{1, 2, \dots, 9\}$ și $r < 9$ este număr natural,

..... **1 punct**
deci $n \leq 9 \cdot 999 + 8 = 8999$ și apoi $\frac{n + 36}{4} < 2258$,

..... **1 punct**
ceea ce arată că $\left[\frac{n + 36}{4} \right] = 2009$ sau 2090.

..... **2 puncte**
Dacă $\left[\frac{n + 36}{4} \right] = 2009$, atunci $n + 36 = 4 \cdot 2009 + q$, unde $q \in \{0, 1, 2, 3\}$,
deci $n \in \{8000, 8001, 8002, 8003\}$. Dintre acestea, doar 8000 convine, deoarece
câtul împărțirii numerelor 8001, 8002, 8003 la 9 este 889.

..... **2 puncte**
Dacă $\left[\frac{n + 36}{4} \right] = 2090$, atunci $n + 36 = 4 \cdot 2090 + q$, unde $q \in \{0, 1, 2, 3\}$,
deci $n \in \{8324, 8325, 8326, 8327\}$. Niciun număr nu verifică prima cerință,
deci $n = 8000$.

..... **1 punct**

Problema 2. De o parte și de alta a planului triunghiului ABC se consideră punctele S și P astfel încât $SA = SB = SC$ și $PA \perp PB \perp PC \perp PA$. Știind că volumul piramidei $PABC$ este egal cu dublul volumului piramidei $SABC$, să se arate că dreapta SP trece prin centrul de greutate al triunghiului ABC .

Soluție. Notăm cu O , respectiv H proiecțiile punctelor S și P pe planul (ABC) . Fie G punctul de intersecție al dreptei SP cu planul triunghiului.

Din congruența triunghiurilor SOA , SOB , SOC rezultă că $OA = OB = OC$, deci O este centrul cercului circumscris triunghiului ABC .

..... **1 punct**
 Deoarece $PA \perp (PBC)$ avem $PA \perp BC$; în plus $PH \perp BC$, rezultă $BC \perp (PAH)$, de unde $AH \perp BC$. Analog $BH \perp AC$, deci H este ortocentrul triunghiului ABC .

..... **2 puncte**
 Dacă $O = H$, atunci triunghiul ABC este echilateral, punctele G, H, O coincid și cerința este demonstrată.

..... **1 punct**
 Dacă punctele O și H sunt distincte, atunci G, H, O sunt coliniare, deoarece $SO \parallel PH$ și $G \in SP$. Din condiția asupra volumelor rezultă $2SO = PH$, iar din asemănarea triunghiurilor dreptunghice GOS și GHP obținem

$$\frac{OG}{GH} = \frac{1}{2}.$$

..... **2 puncte**
 Fie M mijlocul segmentului BC și Γ centrul de greutate al triunghiului ABC . Atunci triunghiurile AHT și OMT sunt asemenea, de unde $\frac{OT}{\Gamma H} = \frac{1}{2}$, adică $G = \Gamma$, ceea ce trebuia arătat.

..... **1 punct**

Problema 3. Pentru numerele reale a, b, c notăm $x = |a| + |b| + |c|$ și $y = |a - 2| + |b - 2| + |c - 2|$.

- a) Să se arate că $x + y \geq 6$.
- b) Știind că $a, b, c \in [-1, 3]$ și că media aritmetică a numerelor a, b, c este 1, să se arate că $x + y \leq 10$.

Soluție. a) Din inegalitatea modulului avem $|t| + |t - 2| \geq |t - (t - 2)| = 2$ oricare ar fi numărul real t .

..... **1 punct**
 Atunci $|x| + |y| = (|a| + |a - 2|) + (|b| + |b - 2|) + (|c| + |c - 2|) \geq 2 + 2 + 2 = 6$.

..... **1 punct**
 b) Fie $f(t) = |t| + |t - 2|$. Observăm că pentru $t \in [0, 2]$ avem $f(t) = t + (2 - t) = 2$,

..... **1 punct**
 pentru $t \in (2, 3]$ avem $f(t) = 2t - 2 \leq 4$, iar pentru $t \in [-1, 0)$ avem $f(t) = 2 - 2t \leq 4$.

..... **1 punct**
 Vom arăta că dacă $a, b, c \in [-1, 3]$ și $a + b + c = 3$, atunci unul dintre cele trei numere este în intervalul $[0, 2]$. Fie $a \leq b \leq c$. Este evident că nu putem avea $a, b, c \in [-1, 0)$ sau $a, b, c \in (2, 3]$.

..... **1 punct**

Dacă $a, b, c \notin [0, 2]$, rămân cazurile:

- $a, b \in [-1, 0]$ și $c \in (2, 3]$
- $a \in [-1, 0]$ și $b, c \in (2, 3]$.

În primul caz avem $a + b + c < 0 + 0 + 3 = 3$, fals, iar în al doilea caz avem $a + b + c > -1 + 2 + 2 = 3$, fals.

..... **1 punct**

În concluzie, $|x| + |y| = f(a) + f(b) + f(c) \leq 4 + 2 + 4 = 10$.

..... **1 punct**

Problema 4. Prin plane paralele la fețele sale, un cub se împarte în 27 de paralelipede dreptunghice, dintre care exact două sunt cuburi. Să se arate că cele două cuburi au muchii de lungimi egale.

Soluție. Fie A un vârf al cubului. Muchiile din A sunt împărțite de planele paralele la fețe în câte trei segmente. Într-adevăr, în caz contrar s-ar folosi 26 de plane paralele la o față sau 8 plane paralele la o față și 2 plane la o altă față. Ambele cazuri produc 27 de paralelipede cu o dimensiune egală cu cea a cubului inițial, deci niciun cub, fals.

..... **1 punct**

Notăm cu $x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3$ și z_1, z_2, z_3 lungimile segmentelor generate pe muchiile din A . Observăm că

$$x_1 + x_2 + x_3 = y_1 + y_2 + y_3 = z_1 + z_2 + z_3, \quad (1)$$

sumele reprezentând lungimea muchiei cubului.

..... **1 punct**

Dacă cele două cuburi au dimensiunile $a \neq b$, atunci $a = x_i = y_j = z_k$ și $b = x_p = y_q = z_r$, cu $i \neq p, j \neq q$ și $k \neq r$.

..... **2 puncte**

Fie u cel de-al treilea număr din mulțimea $\{1, 2, 3\} \setminus \{i, p\}$, $v \in \{1, 2, 3\} \setminus \{j, q\}$ și $t \in \{1, 2, 3\} \setminus \{k, r\}$. Relația (1) devine

$$a + b + x_u = a + b + y_v = a + b + z_t,$$

deci

$$x_u = y_v = z_t,$$

..... **2 puncte**

ceea ce arată că printre cele 27 de paralelipede mai există un al treilea, fals.

..... **1 punct**