

Olimpiada de matematică
etapa pe școală – 21.01.2010

Clasa a VIII-a

- 2 p 1. Fie $x = \sqrt{8 - 2\sqrt{15}} - \sqrt{8 + 2\sqrt{15}}$
- a) Arătați că $x^2 \in \mathbb{N}$.
- b) Calculați $(x + 2\sqrt{3})^{2010}$.
2. a) Dacă $9x^2 + y^2 - 6 \cdot (x\sqrt{2} + y\sqrt{3}) + 29 = 0$ atunci arătați că numărul
- 3 p
$$n = \left(\frac{1 - \sqrt{2}}{3x} - \frac{2 - 3\sqrt{3}}{y} \right) \cdot \left(\frac{9\sqrt{2} - 4\sqrt{3}}{36} \right)^{-1}$$
 este număr natural
- b) Dacă $x^2 + x - 1 = 0$, calculați $x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x + 7$
- c) Dacă $a > 0$ și $x \in [-a; a]$, arătați că $\sqrt{2a} \leq \sqrt{a-x} + \sqrt{a+x} \leq 2\sqrt{a}$
3. Fie paralelogramul ABCD cu latura $AB = 2AD = 2a$, ($a > 0$). Pe planul paralelogramului se ridică perpendiculara $NA = a$.
- a) Demonstrați că $BM \perp (NAM)$, unde M este mijlocul laturii CD
- b) Determinați măsura unghiului format de dreapta MN cu planul paralelogramului precum și distanța de la punctul A la planul (NMiB), în cazul când $m(\widehat{BCD}) = 120^\circ$
4. Fie A, B, C, D patru puncte necoplanare. Dacă E este piciorul perpendicularei din D pe bisectoarea unghiului DAB, iar M este mijlocul lui CD, arătați că EM \parallel (ABC)
- 1 p

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 1 punct din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 2 ore.

Succes!

