BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA a VIII-a

1. a) Calculaţi $\left(\frac{1}{\sqrt{27}}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$.

b) Rezolvaţi în $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ ecuaţia: $\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}=\frac{1}{\sqrt{27}}$.

Laura Schroder, Câmpulung Moldovenesc

Soluţie. **a)** $\left(\frac{1}{\sqrt{27}}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2=\frac{1}{27}-\frac{2}{3\sqrt{3x}}+\frac{1}{x}$.

b) Ecuaţia devine: $\frac{1}{y}=\left(\frac{1}{\sqrt{27}}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 \Rightarrow \frac{1}{y}=\frac{1}{27}-\frac{2}{3\sqrt{3x}}+\frac{1}{x}$, dar $x,y\in\mathbb{N}^* \Rightarrow \sqrt{3x}\in\mathbb{Q} \Rightarrow 3x$ este pătrat perfect şi atunci vom avea $x=3a^2, a^2\in\mathbb{N}^*$. Analog se obţine $y=3b^2$, $b^2\in\mathbb{N}^*$. Ecuaţia devine: $\frac{1}{\sqrt{3a^2}}+\frac{1}{\sqrt{3b^2}}=\frac{1}{\sqrt{27}} \Leftrightarrow \frac{1}{|a|}+\frac{1}{|b|}=\frac{1}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |b|=\frac{3|a|}{|a|-3} \Rightarrow \begin{cases}(|a|-3)/3|a| \\ |a|-3>0\end{cases}$. Dar $(|a|-3)/3(|a|-3)$ şi obţinem $|a|-3\in D_9 \Rightarrow |a|\in\{4,6,12\} \Rightarrow$

$\Rightarrow (|a|,|b|)\in\{(4,12),(6,6),(12,4)\}$. Atunci $(x,y)\in\{(48,432);(108,108);(432,48)\}$.

Barem.

$\left(\frac{1}{\sqrt{27}}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2=\frac{1}{27}-\frac{2}{3\sqrt{3x}}+\frac{1}{x}$	2 p
Obţine $\sqrt{3x}\in\mathbb{Q}$	1 p
$3x$ este pătrat perfect $\Rightarrow x=3a^2, a^2\in\mathbb{N}^*$. Analog rezultă $y=3b^2$, $b^2\in\mathbb{N}^*$	1 p
Înlocuieşte x şi y şi obţine $\frac{1}{|a|}+\frac{1}{|b|}=\frac{1}{3}$	1 p
Finalizare $(x,y)\in\{(48,432);(108,108);(432,48)\}$	2 p

2. Fie $x,y,z,d\in\mathbb{Q}_+^*$ astfel încât $\sqrt{d}\notin\mathbb{Q}$ şi $\frac{x\sqrt{d}+y}{y\sqrt{d}+z}\in\mathbb{Q}$. Să se găsească cea mai mică valoare a numărului $a=\frac{x+z}{y}$.

(***)

Soluţie. $\frac{x\sqrt{d}+y}{y\sqrt{d}+z}\in\mathbb{Q} \Leftrightarrow \frac{(x\sqrt{d}+y)(y\sqrt{d}-z)}{(y\sqrt{d}+z)(y\sqrt{d}-z)}\in\mathbb{Q} \Leftrightarrow \frac{(xy-yz)+\sqrt{d}\left(y^2-xz\right)}{y^2d-z^2}\in\mathbb{Q} \Leftrightarrow y^2-xz=0 \Leftrightarrow y^2=xz,$ dar $x,y,z\in\mathbb{Q}_+^*$ şi obţinem $y=\sqrt{xz}\le\frac{x+z}{2} \Rightarrow y\le\frac{x+z}{2} \Rightarrow 2\le\frac{x+z}{y} \Rightarrow a=\frac{x+z}{y}\ge 2$. Atunci $\min a=2$.

Barem.

Raţionalizează..	2p
Pune condiţia $\frac{(xy-yz)+\sqrt{d}\left(y^2-xz\right)}{y^2d-z^2}\in\mathbb{Q}$	1 p
Obţine $y^2=xz$	1 p
$y=\sqrt{xz}\le\frac{x+z}{2}$	2p
Finalizează şi obţine $\min a=2$	1p

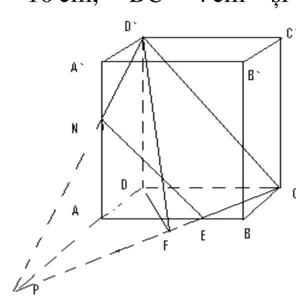
3. Fie paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ cu dimensiunile $AB=10$ cm, $BC=4$ cm şi $AA'=8\sqrt{3}$ cm, $E\in(AB)$ astfel încât $A_{AEC}=14$ cm^2.

a) Calculaţi EC.

b) Aflaţi măsura unghiului format de planele $(D'EC)$ şi (ABC).

c) Dacă $AA'\cap(D'EC)=\{N\}$, calculaţi $A'N$ şi aria patrulaterului $NECD'$.

Ispăşoiu Dorel, Gura Humorului



Soluţie. **a)** $A_{AEC}=\frac{AE\cdot BC}{2} \Rightarrow \frac{AE\cdot 4}{2}=14 \Rightarrow AE=7,\ EB=3$ (cm).

Din ΔEBC cu $m(\widehat{B})=90^0$, $EB=3$ cm, $BC=4$ cm $\Rightarrow EC=5$ cm.

b) În ΔDEC: $EG\perp CD,\ DF\perp EC \Rightarrow DF\cdot EC=DC\cdot EG \Rightarrow DF=8$ cm.

Conform reciprocei teoremei celor trei perpendiculare obținem $D'F \perp EC$ și atunci $m\left(\widehat{(D'EC),(ABC)}\right)=m(\widehat{D'FD})$.

În $\Delta D'DF$: $\operatorname{tg}(\widehat{D'FD})=\frac{D'D}{DF}=\sqrt{3}\Rightarrow m(\widehat{D'FD})=60^0$.

c) Fie $CE\cap AD=\{P\}$, $PD'\cap AA'=\{N\}$. Cum $(NAE)\parallel(D'DC)\Rightarrow\frac{PA}{PD}=\frac{AE}{DC}=\frac{AN}{DD'}\Rightarrow\frac{7}{10}=\frac{AN}{8\sqrt{3}}\Rightarrow AN=\frac{28\sqrt{3}}{5}(\text{cm})\Rightarrow$

$\Rightarrow A'N=8\sqrt{3}-\frac{28\sqrt{3}}{5}\Rightarrow A'N=\frac{12\sqrt{3}}{5}(\text{cm})$. $A_{DAEC}=A_{D'NEC}\cdot\cos\left(\widehat{(D'EC),(ABC)}\right)\Rightarrow 34=A_{D'NEC}\cdot\frac{1}{2}\Rightarrow A_{D'NEC}=68\left(\text{cm}^2\right)$.

Barem.

Figura	1 p
a) $A_{AEC}=\frac{AE\cdot BC}{2}$, $AE=7$ cm..	1 p
$EC=5$ cm..	1 p
b) În ΔDEC: $DF\perp EC\Rightarrow DF\cdot 5=10\cdot 4\Rightarrow DF=8$ cm..	1 p
Justificarea că $m\left(\widehat{(D'EC),(ABC)}\right)=m(\widehat{D'FD})$ și $\operatorname{tg}(\widehat{D'FD})=\frac{D'D}{DF}=\sqrt{3}\Rightarrow m(\widehat{D'FD})=60^0$	1p
c) Justificarea $\frac{PA}{PD}=\frac{AE}{DC}=\frac{AN}{DD'}$ și calculul $AN=\frac{28\sqrt{3}}{5}(\text{cm})\Rightarrow A'N=\frac{12\sqrt{3}}{5}(\text{cm})$	1 p
$A_{DAEC}=A_{D'NEC}\cdot\cos\left(\widehat{(D'EC),(ABC)}\right)\Rightarrow 34=A_{D'NEC}\cdot\frac{1}{2}\Rightarrow A_{D'NEC}=68\left(\text{cm}^2\right)$	1 p

4. Dintr-un punct A exterior unui plan α se duc perpendiculara OA și oblicele AB, AC față de acest plan, $O,B,C\in\alpha$. Fie H, H_1, ortocentrele triunghiurilor ABC și OBC, $[AD]$ și $[BE]$ înălțimi în triunghiul ABC și $[BF]$ înălțime în triunghiul OBC. Să se arate că:

a) $BF\perp(AOC)$; **b)** $HH_1\perp(ABC)$; **c)** $\frac{OA}{AD}\cdot\frac{DH_1}{H_1B}\cdot\frac{BE}{EF}=1$.

(***)

Soluție. **a)** Din $AO\perp\alpha$, $BF\subset\alpha\Rightarrow AO\perp BF$, dar $OC\perp BF\Rightarrow BF\perp(AOC)$.

b) $BF\perp(AOC)$, $BE\perp AC$, $EF,AC\subset(AOC)$ $\overset{R.T.3\perp}{\Rightarrow}$ $FE\perp AC$. Din $AC\perp FE$ și $AC\perp BE\Rightarrow AC\perp(BEF)$, dar $HH_1\subset(BEF)$ și avem $AC\perp HH_1$ (1). $AO\perp\alpha$, $OD\perp BC$, $OD,BC\subset\alpha\overset{T.3\perp}{\Rightarrow}AD\perp BC$. Din $BC\perp OD$ și $BC\perp AD$ rezultă că $BC\perp(AOD)$, dar $HH_1\subset(AOD)$ și avem $BC\perp HH_1$ (2). Din (1) și (2) obținem $HH_1\perp(ABC)$.

c) Din $\Delta BFE\sim\Delta BHH_1\Rightarrow\frac{BE}{BH_1}=\frac{FF}{HH_1}\Rightarrow\frac{BE}{EF}=\frac{BH_1}{HH_1}$ (3), iar din $\Delta DOA\sim\Delta DHH_1\Rightarrow\frac{OA}{HH_1}=\frac{DA}{DH_1}\Rightarrow\frac{OA}{AD}=\frac{HH_1}{DH_1}$ (4).

Din (3) și (4) obținem $\frac{OA}{AD}\cdot\frac{DH_1}{H_1B}\cdot\frac{BE}{EF}=\frac{HH_1}{DH_1}\cdot\frac{DH_1}{H_1B}\cdot\frac{BH_1}{HH_1}=1$.

Barem.

$AO\perp\alpha$, $BF\subset\alpha\Rightarrow AO\perp BF$, dar $OC\perp BF\Rightarrow BF\perp(AOC)$	2 p
$BF\perp(AOC)$, $BE\perp AC$, $EF,AC\subset(AOC)$ $\overset{R.T.3\perp}{\Rightarrow}$ $FE\perp AC$. Din $AC\perp FE$ și $AC\perp BE\Rightarrow AC\perp(BEF)$, dar $HH_1\subset(BEF)$ și avem $AC\perp HH_1$ (1)	1 p
$AO\perp\alpha$, $OD\perp BC$, $OD,BC\subset\alpha\overset{T.3\perp}{\Rightarrow}AD\perp BC$. Din $BC\perp OD$ și $BC\perp AD$ rezultă că $BC\perp(AOD)$, dar $HH_1\subset(AOD)$ și avem $BC\perp HH_1$ (2) Din (1) și (2) obținem $HH_1\perp(ABC)$	1 p
$\Delta BFE\sim\Delta BHH_1\Rightarrow\frac{BE}{BH_1}=\frac{FF}{HH_1}\Rightarrow\frac{BE}{EF}=\frac{BH_1}{HH_1}$ (3)..	1 p
$\Delta DOA\sim\Delta DHH_1\Rightarrow\frac{OA}{HH_1}=\frac{DA}{DH_1}\Rightarrow\frac{OA}{AD}=\frac{HH_1}{DH_1}$ (4)..	1 p
$\frac{OA}{AD}\cdot\frac{DH_1}{H_1B}\cdot\frac{BE}{EF}=\frac{HH_1}{DH_1}\cdot\frac{DH_1}{H_1B}\cdot\frac{BH_1}{HH_1}=1$	1 p

Notă:
Orice altă soluție corectă se va puncta corespunzător.