

Fractii algebrice
Selectii de pe "100 de variante"

<http://sorinborodi.ro>

@ Fie expresia $E(x) = \left(\frac{x-6}{x^2-25} - \frac{x}{5-x} - \frac{2}{x+5} \right) : \frac{2x^2+x-6}{x^2-25}$, unde $x \in \mathbf{R} \setminus \left\{ -5; -2; \frac{3}{2}; 5 \right\}$.

a) Arătați că $(x+2)(2x-3) = 2x^2 + x - 6$, pentru orice $x \in \mathbf{R}$.

b) Arătați că $E(x) = \frac{x+2}{2x-3}$, pentru orice $x \in \mathbf{R} \setminus \left\{ -5; -2; \frac{3}{2}; 5 \right\}$.

c) Aflați valorile întregi ale numărului a pentru care $E(a) \in \mathbf{Z}$.

@ Fie expresia $F(x) = \left(\frac{2x^2-7x-17}{x^2-10x+21} - \frac{x+1}{x-7} \right) : \frac{1}{x^2-9}$, unde $x \in \mathbf{R} \setminus \{-3; 3; 7\}$.

a) Arătați că $x^2 - 10x + 21 = (x-3) \cdot (x-7)$, pentru orice $x \in \mathbf{R}$.

b) Demonstrați că $F(x) = (x+2) \cdot (x+3)$, pentru orice $x \in \mathbf{R} \setminus \{-3; 3; 7\}$.

c) Arătați că $F(a)$ este număr par, pentru orice $a \in \mathbf{N} \setminus \{3; 7\}$.

@ Fie expresia $E(x) = \left[\left(\frac{x-2}{x+2} \right)^2 + 1 + \frac{2x-4}{x+2} \right] \cdot \frac{x+2}{2x}$, unde $x \in \mathbf{R} \setminus \{-2; 0\}$.

a) Arătați că $E(x) = \frac{2x}{x+2}$, pentru orice $x \in \mathbf{R} \setminus \{-2; 0\}$.

b) Verificați dacă există numere naturale n , diferite de 0, pentru care $\frac{1}{n} \cdot E(n)$ este număr întreg.

c) Determinați numerele întregi a pentru care $E(a)$ este număr întreg.

@ Simplificând raportul $\frac{x-4}{x^2-4x+4}$ prin $x-2$ diferit de zero, se obține:

@ a) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x^2 - 4x + 3 = 0$.

b) Arătați că valoarea raportului $\frac{n^2+4n+3}{n+3}$ este număr natural, oricare ar fi n număr natural.

c) Arătați că $\left(\frac{x+2}{x-3} \right)^2 \cdot \frac{x^2-4x+3}{x^2+4x+3} : \frac{x^2+4x+4}{x^2-9} = \frac{x-1}{x+1}$, oricare ar fi $x \in \mathbf{R} \setminus \{-3; -2; -1; 3\}$.

@ a) Rezolvați, în mulțimea numerelor reale, ecuația $1-9x^2=0$.

b) Arătați că $(x+1) \cdot (1-3x) = 1-2x-3x^2$, pentru orice x real.

c) Fie expresia $E(x) = \frac{7x-3x^2}{1-9x^2} - \frac{3x}{1-2x-3x^2} \cdot \left(1 + \frac{3x+x^2}{x+3} \right)$. Arătați că $E(x) = \frac{4x}{1+3x}$.

@ Fie expresia $E(x) = (2x+1)^2 - (x-1)^2 + (x-2)(x+2) - 3x^2 + 14$, unde x este număr real.

a) Arătați că $E(x) = x^2 + 6x + 10$, pentru orice x număr real.

b) Calculați valoarea expresiei $E(x)$ pentru $x = -3$.

c) Arătați că $E(x) > 0$, pentru orice valoare reală a numărului x .

@ a) Arătați că $\frac{2x+6}{x^2+4x+3} = \frac{2}{x+1}$, pentru orice $x \in \mathbf{R} \setminus \{-1; -3\}$.

b) Determinați numerele întregi $a \in \mathbf{Z} \setminus \{-3; -1\}$, pentru care $\frac{2a+6}{a^2+4a+3}$ este număr întreg.

c) Demonstrați egalitatea $\left(\frac{4}{x-1} + \frac{13-5x}{1-x^2} - \frac{2x+6}{x^2+4x+3} \right) : \frac{1}{x+1} = 7$, pentru orice $x \in \mathbf{R} \setminus \{-1; -3; 1\}$.

@ a) Rezolvați, în mulțimea numerelor reale, ecuația $x^2 - 10x + 25 = 0$.

b) Arătați că numărul $p = y^2 + 4y + 5$ este pozitiv pentru orice $y \in \mathbf{R}$.

c) Determinați cea mai mică valoare a numărului $A = \sqrt{x^2 - 10x + 29} + \sqrt{y^2 + 4y + 5}$, unde x și y sunt numere reale.

- @ Fie expresia $E(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 3x - 6}{x^2 - 4}$, unde $x \in \mathbf{R} \setminus \{-2; 2\}$.
- Calculați valoarea expresiei pentru $x = \sqrt{3}$.
 - Arătați că $E(x)$ se simplifică prin $x + 2$, pentru orice $x \in \mathbf{R} \setminus \{-2; 2\}$.
 - Pentru ce valori întregi ale numărului a valoarea expresiei $E(a)$ este număr întreg?
- @ Fie expresia $E(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 6x + 9}$. După simplificare, cu numărul $x - 3 \neq 0$, se obține:
- @ Fie numerele $a = \sqrt{7} - \sqrt{2}$ și $b = \sqrt{7} + \sqrt{2}$.
- Arătați că numărul $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ aparține intervalului $\left(\frac{4}{5}; \frac{6}{5}\right)$.
 - Calculați valoarea numărului $(a - b)^2$. c) Calculați valoarea numărului $(a - b + 2\sqrt{2})^{2007}$.
- @ a) Arătați că $\frac{3x + 6}{x^2 + x - 2} = \frac{3}{x - 1}$, pentru orice $x \in \mathbf{R} \setminus \{-2; 1\}$.
- @ b) Aflați numerele întregi a pentru care fracția $\frac{3}{a - 1}$ reprezintă un număr întreg.
- c) Arătați că $\left(\frac{2}{x + 1} - \frac{4x}{x^2 - 1} - \frac{3x + 6}{x^2 + x - 2}\right) : \frac{1}{1 - x} = 5$, pentru orice $x \in \mathbf{R} \setminus \{-2; \pm 1\}$.
- @ a) Fie expresia $E(x) = x^2 + x + 5\sqrt{2}$. Calculați valoarea expresiei pentru $x = \sqrt{2} - 3$.
- b) Verificați dacă perechea $(1; 1)$ este soluție a ecuației $4x - y - 3 = 0$.
- c) Știind că $4x - y - 3 = 0$ și că numărul x se află în intervalul $[0; 1]$, arătați că numărul y se află în intervalul $[-3; 1]$.
- @ Fie expresia $E(x) = \left(\frac{x^2 + 2}{x^2 + 4x + 4} - \frac{x}{x + 2}\right) : \left(\frac{1}{x - 2} - \frac{3}{x^2 - 4}\right)$, unde $x \in \mathbf{R} \setminus \{-2; 1; 2\}$.
- Calculați $E(\sqrt{2}) \cdot E(-\sqrt{2})$.
 - Determinați numerele reale a pentru care $E(a) = a + 2$.
- @ Fie expresia $E(x) = \left(\frac{x}{x - 4} + \frac{x - 4}{x} - 1\right) : \frac{x - 4x + 16}{2x}$, unde $x \in \mathbf{R} \setminus \{0; 4\}$.
- Determinați valorile reale ale numărului x pentru care $E(x) > 0$.
 - Determinați valorile naturale ale numărului a pentru care $E(a) \in \mathbf{Z}$.
- @ a) Rezolvați, în mulțimea numerelor reale, ecuația $x(x + 4) = 12$.
- b) Arătați că, pentru orice număr întreg a , diferit de zero, $E(a) = \left(\frac{1}{9a} - \frac{1}{a^3}\right) \cdot 9a^4$ este număr întreg.
- c) Arătați că $\left(\frac{1}{9x} - \frac{1}{x^3}\right) \cdot \frac{9x^4}{x^3 + 6x^2 + 9x} = \frac{x - 3}{x + 3}$, pentru orice $x \in \mathbf{R} \setminus \{0; -3\}$.
- @ Fie expresia $E(x) = \left(\frac{1}{x^2 - 2x} - \frac{1}{x^2 + 2x} + \frac{2}{x^2 - 4}\right) : \frac{2x + 6}{x^3 - 4x}$, unde $x \in \mathbf{R} \setminus \{-3; -2; 0; 2\}$.
- Arătați că $E(x) = \frac{x + 2}{x + 3}$, pentru orice $x \in \mathbf{R} \setminus \{-3; -2; 0; 2\}$.
 - Rezolvați în mulțimea numerelor întregi inecuația $|x + 3| \cdot |E(x)| < 4$.
 - Aflați numerele întregi a pentru care $2 \cdot E(a)$ reprezintă un număr întreg.

- @ Fie expresia $E(x) = \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{1-x} + \frac{2}{x^2-1} \right) \cdot \frac{x+1}{2}$ unde $x \in \mathbf{R} \setminus \{-1; 1\}$.
- Arătați că $E(x) = \frac{x+1}{x-1}$, pentru orice $x \in \mathbf{R} \setminus \{-1; 1\}$.
 - Aflați numerele întregi x pentru care valoarea expresiei $E(x)$ este număr întreg.
 - Determinați numerele naturale a și b , astfel încât $E(\sqrt{2}) = (a\sqrt{2} + b)^2$.
- @ Fie expresia $E(x) = \left(\frac{x^2-4}{x^2-9} - 1 \right) : \left(\frac{1}{x-3} + \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x^2-9} \right)$, unde $x \in \mathbf{R} \setminus \left\{ -3; \frac{1}{2}; 3 \right\}$.
- Calculați valoarea expresiei $E(x)$ pentru $x = 0$.
 - Arătați că $E(x) = \frac{5}{2x-1}$, pentru orice $x \in \mathbf{R} \setminus \left\{ -3; \frac{1}{2}; 3 \right\}$.
 - Determinați valorile întregi ale numărului a pentru care $E(a) \in \mathbf{Z}$.
- @ Prin simplificarea raportului $\frac{x^2-9}{x^2+6x+9}$ cu numărul $x+3$, diferit de zero, se obține:
- @ Fie expresia $E(x) = (x+3)^2 + 2(x-4)(x+3) + (x-4)^2$, cu $x \in \mathbf{R}$.
- Arătați că $E(x) = (2x-1)^2$, oricare ar fi $x \in \mathbf{R}$.
 - Calculați $E(\sqrt{2}) \cdot E(-\sqrt{2})$.
 - Determinați valorile întregi ale numărului a pentru care $E(a)$ are cea mai mică valoare posibilă.
- @ Fie expresia: $E(x) = \frac{x+1}{x^2+1} : \left(\frac{x+3}{4x-4} - \frac{1}{x-1} \right) \cdot \left(1 - \frac{1}{x+1} \right)$, unde $x \in \mathbf{R} \setminus \{-1; 1\}$.
- Arătați că $E(x) = \frac{4x}{x^2+1}$, pentru orice $x \in \mathbf{R} \setminus \{-1; 1\}$.
 - Determinați valorile reale ale numărului x pentru care $E(x) \cdot (x^2+1) \leq 1$.
 - Determinați valorile întregi ale numărului a pentru care $E(a)$ este număr întreg.
- @ Simplificând raportul $\frac{x^2-10x+25}{x^2-25}$ prin $x-5$, diferit de zero, se obține:
- @ Fie expresia $E(x) = (x+1)^2 + 2 \cdot (x-7) + 1$, unde $x \in \mathbf{R}$.
- Arătați că $E(x) = (x-2) \cdot (x+6)$, pentru orice $x \in \mathbf{R}$.
 - Calculați $E(-1)$.
 - Arătați că $E(x) + 16 \geq 0$, pentru orice $x \in \mathbf{R}$.
- @ Fie expresia $E(x) = \left(\frac{2}{x-2} + \frac{x}{x+2} \right) : \frac{x^2+4}{x^2-x-2}$, unde $x \in \mathbf{R} \setminus \{-2; -1; 2\}$.
- Arătați că $E(x) = \frac{x+1}{x+2}$, pentru orice $x \in \mathbf{R} \setminus \{-2; -1; 2\}$.
 - Determinați numerele întregi a pentru care $E(a) \in \mathbf{Z}$.
 - Rezolvați în mulțimea numerelor reale, ecuația $2E(x) + E(0) = 3$.
- @ Fie expresia $E(x) = \left(\frac{5}{x-2} + \frac{2}{x+2} - \frac{6}{x^2-4} \right) : \left(\frac{x^2+4}{x^2-4} + 1 \right)$, unde $x \in \mathbf{R} \setminus \{-2; 0; 2\}$.
- Calculați valoarea expresiei $E(x)$ pentru $x = \frac{1}{\sqrt{5}-1} - \frac{1}{\sqrt{5}+1}$.
 - Determinați numerele reale a pentru care $E(a) = \frac{1}{2}a + 3$.

@ Fie expresia $E(x) = \left(\frac{1}{x+2} + \frac{x+1}{x^2-4} - \frac{1}{x-2} \right) : \frac{x^2-9}{x^2+x-6}$, unde $x \in \mathbf{R} \setminus \{-3; -2; 2; 3\}$.

a) Arătați că $(x+3)(x-2) = x(1+x) - 6$, pentru orice x număr real.

b) Arătați că $E(x) = \frac{1}{x+2}$, pentru orice $x \in \mathbf{R} \setminus \{-3; -2; 2; 3\}$.

c) Calculați media geometrică a numerelor $a = \left| E(2\sqrt{5}) \right|$ și $b = \left| E(-2\sqrt{5}) \right|$.

@ Fie expresia $E(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1$, unde $x \in \mathbf{R}$.

a) Calculați valoarea expresiei $E(x)$ pentru $x=1$.

b) Fie numărul $N = x^4 - 2x^3 + x^2$. Arătați că $N \geq 0$, pentru orice x număr real.

c) Arătați că pentru orice număr natural $n > 1$, valoarea raportului $\frac{E(n)}{n^3 - n^2 + n - 1}$ este un număr natural.

@ a) Arătați că $5n^2 - 3n - 2 = (5n+2)(n-1)$, pentru orice n număr natural.

b) Arătați că $\frac{4-25n^2}{5n^2-3n-2} : \frac{4-10n}{n-1} + \frac{11n+4}{10n+4} = \frac{8n+3}{5n+2}$, pentru orice n număr natural mai mare decât 2.

c) Demonstrați că $\frac{8n+3}{5n+2}$ este o fracție ireductibilă, pentru orice n număr natural.

@ Fie raportul $F(x) = \frac{x^3 + x^2 - 9x - 9}{x^3 - 9x}$, unde $x \in \mathbf{R} \setminus \{-3; 0; 3\}$.

b) Determinați numerele reale a pentru care $F(a) = a + 1$.

c) Calculați valoarea sumei $S = F(6) + F(12) + F(20) + F(30) + F(42) + F(56)$.

@ a) Simplificați raportul: $\frac{x}{x^2 - x}$, unde $x \in \mathbf{R} \setminus \{0; 1\}$.

b) Arătați că $2 + x - 2x^2 - x^3 = (x+2)(1-x)(1+x)$, pentru orice x real.

c) Fie expresia $E(x) = \left(\frac{x}{x^2 - x} + \frac{x+2}{2+x-2x^2-x^3} + \frac{x^2}{x^2+x} \right) \cdot \left(x - \frac{1}{x} \right)$, unde $x \in \mathbf{R} \setminus \{0; 1; -1; -2\}$.

Arătați că $E(x) = x$.

@ Fie expresia $E(x) = \frac{3x^2 - 18x + 27}{(x^2 + x) \cdot (x^2 - x - 6)}$, unde $x \in \mathbf{N}^* \setminus \{3\}$.

a) Rezolvați, în mulțimea numerelor întregi, ecuația $x^2 - x - 6 = 0$.

b) Arătați că $E(x)$ se simplifică prin $3(x-3)$, pentru orice $x \in \mathbf{N}^* \setminus \{3\}$.

c) Pentru care numere naturale n , numărul $E(n)$ se simplifică prin 2?

@ Se consideră expresia $F(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 2}$, unde x este număr rațional.

a) Calculați $F(2)$.

b) Rezolvați în mulțimea numerelor raționale ecuația $7 \cdot F(x) = 9$.

c) Determinați numerele raționale a , pentru care valoarea produsului $\sqrt{2} \cdot F(a)$ este număr rațional.

@ Fie expresia $F(x) = \left(\frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 + 2x - 3} - \frac{2}{x+1} - \frac{7}{x^2 - 1} \right) : \frac{1}{x^2 - 1}$, unde $x \in \mathbf{R} \setminus \{-3; -1; 1\}$.

a) Demonstrați că $(x^2 + 4x + 3) \cdot (x-1) = (x^2 + 2x - 3) \cdot (x+1)$, pentru orice x real.

b) Arătați că $F(x) = (x+2) \cdot (x-2)$, pentru orice $x \in \mathbf{R} \setminus \{-3; -1; 1\}$.

c) Calculați valoarea numărului real a astfel încât $F(a) = a - 2$.