Concursul de matematică "Simon Petru"
Ediţia a XV-a
Tg.-Mureş, 10.01.2015

Clasa a V-a

Subiectul I

Fie numerele: $A=\left[2+2^2\cdot 2^{24}+2^{95}:2^{14}+2\cdot\left(3^2\right)^{25}\right]:\left(1+2^{25}+2^{80}+3^{50}\right)\cdot 1^{300}-2+3^{16}$

$B=2^{70}-\left\{2^3\cdot\left(2^3+2^2+2^1+2^0\right)-\left[5-(10000-9375):5^3\right]:9^{1992}-26\cdot 2^2\right\}\cdot 2^{65}$.

Comparaţi numerele A și B.

Subiectul II

a) Aflaţi câte numere mai mici decât 2015 există, astfel încât dacă înmultim pe oricare dintre ele cu 5, obţinem un număr cel putin egal cu 2015.
b) Câte numere cuprinse între 115 şi 2015 se pot scrie ca produsul a patru numere naturale consecutive?

Prof.Florica și Vasile Ginţa, Tg.Mures

Subiectul III

Suma a trei numere consecutive este 3^{2015}. Demonstraţi că produsul celor trei numere este divizibil cu 10.

Subiectul IV

Fie 10 bile colorate cu câte o culoare. Arătaţi că ori există 4 bile colorate la fel ori există 4 bile de culori diferite.

Clasa a VI-a

Subiectul I.

a) Arătaţi că $1+5+5^2+5^3+...+5^{2015}\vdots 31$
b) Aflaţi a și $b\in\mathbf{N}^*$ știind că $(a;b)=15$ și $2a+5b=330$

Subiectul II.

Calculaţi : $S_1=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\cdots+\frac{1}{930}$,

$$S_2=\left(\frac{2}{1}+\frac{3}{2}+\frac{4}{3}+\cdots+\frac{2015}{2014}\right)-\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2014}\right).$$

Subiectul III.

Fie unghiul obtuz $\widehat{AOB}$, [OC bisectoarea lui, iar [OD semidreapta opusă semidreptei [OC. Dacă [OE$\perp$[OA, [OE în interiorul unghiului $\widehat{AOB}$, iar [OF bisectoarea unghiului $\widehat{BOD}$. Să se afle $m(\widehat{EOB})$ știind că [OA și [OF sunt semidrepte opuse.

Subiectul IV.

Arătaţi că $3^{2014}+4^{2014}<5^{2014}$ **(Gazeta matematică)**

Concursul de matematică "Simon Petru"
Ediţia a XV-a
Tg.-Mureş, 10.01.2015

Clasa a VII-a

Subiectul 1.

Fie numerele $x_1 = 1+1$, $x_2 = 1+\frac{1}{2}$, $x_3 = 1+\frac{1}{3}$, ..., $x_{2014} = 1+\frac{1}{2014}$, ...,$x_n = 1+\frac{1}{n}$, $n \in \mathbf{N}^*$.

a) Arătaţi că $P = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot ... \cdot x_{2014}$ este număr natural.

b) Determinaţi numărul $n \in \mathbf{N}^*$, pentru care $x_n \cdot x_{n+1} \cdot x_{n-2}$ este număr natural.

Subiectul II.

Fie numerele naturale nenule *a, b, c* direct proporționale cu $\overline{bc}$, $\overline{ca}$, respectiv $\overline{ab}$. Arătați că numărul $n = \sqrt{\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\right)\cdot\left(\frac{3a}{a+b+c}+\frac{6b}{a+b+c}+\frac{9c}{a+b+c}\right)}$ este natural.

Subiectul III.

Arătați că într-un trapez isoscel înălțimea este egală cu linia mijlocie dacă și numai dacă diagonalele sunt perpendiculare. **(Gazeta matematica)**

Subiectul IV

În ΔABC notăm cu M mijlocul segmentului (BC) şi $P \in (BC)$ un punct arbitrar. Fie $PT \| AB, T \in (AC), PR \| AC, R \in (AB)$. Dacă $PR \cap AM = \{E\}$ şi $AM \cap TP = \{F\}$, arătaţi că patrulaterul $BECF$ este paralelogram. **(Matlap)**

Clasa a VIII-a

Subiectul I

a) Arătați că $\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$, oricare ar fi $n \in \mathbf{N}^*$.

b) Fie S=$\frac{3}{1^2 \cdot 2^2}+\frac{5}{2^2 \cdot 3^2}+\frac{7}{3^2 \cdot 4^2}+...+\frac{4029}{2014^2 \cdot 2015^2}$. Arătați că $1-S > 0$.

Subiectul II

Fie *x* si *y* numere raționale nenule astfel încât $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2014}$.

Aratați că $\sqrt{\left|\frac{x}{38}-53\right| \cdot \left|\frac{y}{38}-53\right|}$ este număr natural. ***Gazeta matematica 2014***

Subiectul III.

Fie piramida patrulateră regulată VABCD, $\{O\} = AC \cap BD$ si $P, Q \in (VO)$. Dacă $\{E\} = AP \cap CV$, $\{F\} = CP \cap AV$, $\{S\} = BQ \cap DV$ si $\{T\} = DQ \cap BV$, arătați că măsura unghiului dintre dreptele EF și ST nu depind de alegerea punctelor P si Q pe segmentul VO.

Gazeta matematica 2014

Subiectul IV

În vârfurile A, B şi C ale triunghiului ABC se ridică perpendicularele AA', BB' şi CC', de aceeaşi parte a planului (ABC), astfel încât $AA' = BC$, $BB' = AC$ şi $CC' = AB$. Dacă H este ortocentrul triunghiului ABC, iar O este centrul cercului circumscris triunghiului $A'B'C'$, arătaţi că HO$\perp$($A'B'C'$)

Clasa a V-a Barem

Subiectul I

$A=\left[2+2^{26}+2^{81}+2\cdot 3^{50}\right]:\left(1+2^{25}+2^{80}+3^{50}\right)\cdot 1-2+3^{16}$ **(1p)**

$A=2\left[1+2^{25}+2^{80}+3^{50}\right]:\left(1+2^{25}+2^{80}+3^{50}\right)\cdot 1-2+3^{16}$ **(1p)**

$A=2-2+3^{16}=3^{16}$ **(1p)**

$B=2^{70}-\left\{2^{3}\cdot 15-\left[5-625:5^{3}\right]:(3^{2})^{1992}-26\cdot 2^{2}\right\}\cdot 2^{65}$

$B=2^{70}-\left\{2^{3}\cdot 15-\left[5-625:125\right]:3^{3984}-26\cdot 2^{2}\right\}\cdot 2^{65}$ **(2p)**

$B=2^{70}-(120-104)\cdot 2^{65}$

$B=2^{70}-2^{69}=2^{69}=8^{23}$ **(1p)**

$\Rightarrow B>A$ **(1p)**

Subiectul II

a)

2015:5 = 403, cel mai mic numar ce indeplineste condiția din enunț. **(1p)**

Numerele căutate sunt: 403, 404, ... , 2014. **(2p)**

Numărul numerelor din șirul de mai sus este egal cu 2014-403+1= 1612 **(1p)**

b)

$1\cdot 2\cdot 3\cdot 4=24<115$ si $6\cdot 7\cdot 8\cdot 9=3024>2015$ **(1p)**

Numerele care verifică cerința sunt: $2\cdot 3\cdot 4\cdot 5$, $3\cdot 4\cdot 5\cdot 6$, $4\cdot 5\cdot 6\cdot 7$, $5\cdot 6\cdot 7\cdot 8$, adica 4 numere. **(2p)**

Subiectul III

Fie $a, a+1, a+2$ numerele consecutive, suma lor: $3\cdot a+3=3^{2015}$. (1p)

Împărțind relația la 3 obținem $a=3^{2014}-1$ (1p)

Deci numerele căutate sunt: $3^{2014}-1, 3^{2014}, 3^{2014}+1$. (2p)

Aflăm ultimele cifre ale celor 3 numere:

$U(3^{2014}-1)=9-1=8$

$U(3^{2014})=9$

$U(3^{2014}+1)=9+1=10$ (2p)

de unde deducem că ultima cifră a produsului este 0,

deci produsul numerelor este divizibil cu 10 **(1p)**

Subiectul IV

Dacă există 4 bile colorate la fel, atunci concluzia se verifică. **(2p)**

Dacă nu există 4 bile colorate la fel, atunci există cel mult 3 bile de aceeași culoare. **(2p)**

Dar 10=3+3+3+1, deci trebuie să existe 4 culori. **(3p)**

Clasa a VI-a Barem

Subiectul I.

a) $1+5+5^2=31$

Se grupează termenii câte 3. (1p)

$1+5+5^2+5^3(1+5+5^2)+...+5^{2013}(1+5+5^2)\vdots 31$ (1p)

$31(1+5^3+5^6+.......+5^{2013})\vdots 31$ (1p)

b) a=15x

b=15y, (x,y)=1 (1p)
$2\cdot 15\cdot x+5\cdot 15\cdot y=330$
$2\cdot x+5\cdot y=22$ (1p)
Dacă $y=1\Rightarrow 2x=17$ (F)
Dacă $y=2\Rightarrow x=6$ nu sunt numere prime între ele
Dacă $y=3\Rightarrow 2x=7$ (F)
Dacă $y=4\Rightarrow x=1\Rightarrow a=15$
b=60 (2p)

Subiectul II.

$S_1=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{30\cdot 31}=$ 1p

$=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{30}-\frac{1}{31}=$ 1p

$=\frac{1}{1}-\frac{1}{31}=\frac{30}{31}.$ 1p

$S_2=\left(\frac{2}{1}-\frac{1}{1}\right)+\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{2015}{2014}-\frac{1}{2014}\right)=$ 2p

$=1+1+1+\cdots+1=$ 1p

$=2014$ 1p

Subiectul III.

Fie $m(\hat{AOC})=m(\hat{BOC})=x$ (1p)

$m(\hat{AOC})=m(\hat{DOF})=x$ (opuse la vârf) (1p)

[OF bisectoare $\Rightarrow m(\hat{DOF})=m(\hat{BOF})=x$ (2p)

$\Rightarrow m(\hat{DOF})+m(\hat{BOF})+m(\hat{BOC})=180^\circ$ (2p)

$\Rightarrow m(\hat{EOB})=30^\circ$ (1p)

Subiectul IV.

$3^{2014}+4^{2014}=9^{1007}+16^{1007}$ (2p)

$9^{1007}+16^{1007}<(9+16)^{1007}$ (4p)

$(9+16)^{1007}=25^{1007}=5^{2014}$ (1p)

Barem Clasa a VII-a

Subiectul 1.

a) $P = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_{2014} = (1+1)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot \ldots \cdot\left(1+\frac{1}{2014}\right) = 2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{2015}{2014} = 2015$,

deci este număr natural. (3p)

b) $x_n \cdot x_{n+1} \cdot x_{n+2} = \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\left(1+\frac{1}{n+2}\right) = \frac{n+1}{n}\cdot\frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{n+3}{n+2} = \frac{n+3}{n} = 1+\frac{3}{n} \in N \Rightarrow$

$\frac{3}{n} \in N \Rightarrow n \in \{1,3\}$. (4p)

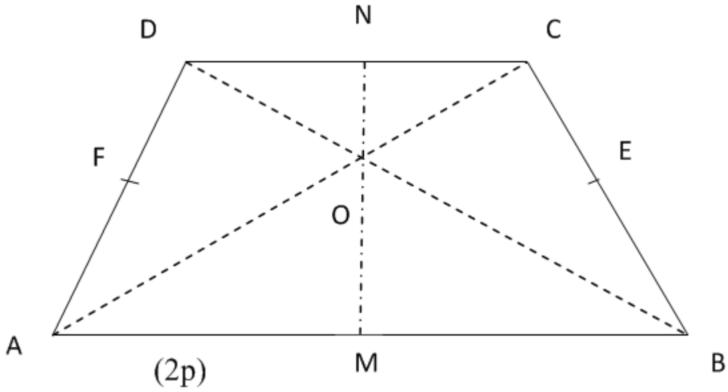
Subiectul II.

$\frac{a}{\overline{bc}} = \frac{b}{\overline{ca}} = \frac{c}{\overline{ab}} = \frac{a+b+c}{11(a+b+c)} = \frac{1}{11}$.. (2p)

De unde $11a = 10b + c$, $11b = 10c + a$ și $11c = 10a + b$. (1p)

Din relațiile de mai sus se deduce $a = b = c$. (3p)

Atunci $n = \sqrt{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{3}{3}+\frac{6}{3}+\frac{9}{3}\right)} = \sqrt{\frac{3}{2}\cdot 6} = \sqrt{9} = 3 \in \mathbb{N}$. (1p)



Subiectul III.

Cazul I. Dacă $AC \perp BD$

Se demonstrează că OM = AM și ON = DN. (2p)

Atunci $MN = OM + ON = \frac{AB}{2} + \frac{DC}{2} = \frac{AB+DC}{2} = l.m.$ (1p)

Cazul II. Dacă MN = FE

Deoarece M, E, N, F sunt mijloace de laturi MENF este paralelogram (1p)

dar avâmd diagonalele egale rezultă MENF deaptunghi, adică $FM \perp ME$ (*) (1p)

Dar $FM \parallel BD, l.m. in\, \Delta\, ABD$, $ME \parallel AC, l.m.$ în ΔABC (1p)

și ținând cont de (*) rezultă $AC \perp BD$. (1p)

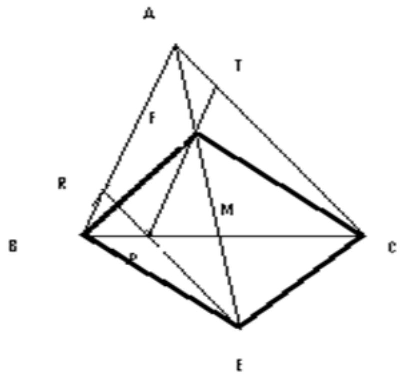
Subiectul IV

În $_\Delta ABM \quad PF \parallel AB \overset{T.Th.}{\Rightarrow} \frac{MF}{MA} = \frac{MP}{MB}(1)$. (2p)

$PE \parallel AC, P \in MC, E \in MA$, din teorema fundamentală de asemănare rezultă că

$_\Delta MPE \approx _\Delta MCA \Rightarrow \frac{MP}{MC} = \frac{ME}{MA} = \frac{PE}{CA}(2)$ (2p)

$MB = MC, (1), (2) \Rightarrow \frac{MF}{MA} = \frac{ME}{MA} \Rightarrow MF = ME$. (2p)



Diagonalele patrulaterului $BECF$ se înjumătăţesc, deci $BECF$ este paralelogram (1p)

Barem Clasa a VIII-a

Subiectul I

a) Demonstrarea relației (2p)

b) Folosind a) avem $S=\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{2014^2}-\frac{1}{2015^2}=1-\frac{1}{2015^2}$ (3p)

De unde $1-S=\frac{1}{2015^2}>0$ (2p)

Subiectul II

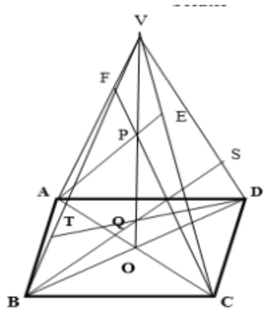
$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2014}\Rightarrow\frac{xy}{x+y}=2014=53\cdot 38$ **(1p)**

$\left|\frac{x}{38}-53\right|\cdot\left|\frac{y}{38}-53\right|=\frac{1}{38^2}\cdot|x-2014|\cdot|y-2014|$ **(1p)**

$|x-2014|\cdot|y-2014|=|(x-2014)\cdot(y-2014)|=\left|\left(x-\frac{xy}{x+y}\right)\cdot\left(y-\frac{xy}{x+y}\right)\right|$ **(2p)**

$\left|\left(x-\frac{xy}{x+y}\right)\cdot\left(y-\frac{xy}{x+y}\right)\right|=\left|\frac{x^2}{x+y}\cdot\frac{y^2}{x+y}\right|=\left(\frac{xy}{x+y}\right)^2$ **(2p)**

Deci, $\sqrt{\left|\frac{x}{38}-53\right|\cdot\left|\frac{y}{38}-53\right|}=\sqrt{\frac{1}{38^2}\cdot\left(\frac{xy}{x+y}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{38^2}\cdot 2014^2}=53\in N$. **(1p)**



Subiectul III.

In triunghiul VAC avem ca $AE\cap CF\cap VO=\{P\}\Rightarrow\frac{VF}{FA}\cdot\frac{AO}{OC}\cdot\frac{CE}{VE}=1$

(Am aplicat teorema Ceva).**(2p)**

Cum AO=CO, deducem ca $\frac{VF}{FA}=\frac{VE}{CE}$. Din aceasta relatie conform reciproce i teoremei lui Thales

deducem ca $FE\parallel AC$ (1). **(2p)**

Cum $BD\perp AC$ si $AC\perp VO\Rightarrow AC\perp(VBD)\Rightarrow AC\perp ST$ (2). **(2p)**

Din relatiile (1) si (2) deducem ca $FE\perp ST$ si deci $m[\sphericalangle(EF,ST)]=90^0$. **(1p)**

Subiectul IV

$\Delta CBB'\equiv\Delta A'AC$ (C.C.) $\Rightarrow A'C=B'C$

Fie M mijlocul segmentului $[A'B']$, din $\Delta CB'A'$ isoscel $\Rightarrow A'B'\perp CM$ (1p)

Dar, $A'B'\perp OM\Rightarrow A'B'\perp(MOC)$. (1p)

$\left.\begin{matrix}CH\perp AB\\ CH\perp AA'\end{matrix}\right\}\Rightarrow CH\perp(AA'B)\Rightarrow A'B'\perp CH$ (1p)

Deoarece $A'B'\perp CM\Rightarrow A'B'\perp(CMH)\Rightarrow$ planele (CMH) și (CMO) coincid $\Rightarrow HO\perp A'B'$. (1p)

Analog putem demonstra că $HO\perp A'C'$. (2p)

Concluzie $HO\perp(A'B'C')$ (1p)