Clasa a VII-a

Problema 1

Soluție. Notăm cu l lungimea laturii triunghiului ABC și cu $[XYZ]$ aria triunghiului XYZ.

Din $A[ABC] = A[ABP] + A[BCP] + A[CAP] \Rightarrow$ ... 4 puncte

$$\frac{l^2\sqrt{3}}{4} = \frac{2009\cdot l}{2} + \frac{2010\, l}{2} + \frac{2011\, l}{2} \Rightarrow \text{......2 puncte}$$

$l = 4020\sqrt{3}$ --- 1 punct

Problema 2

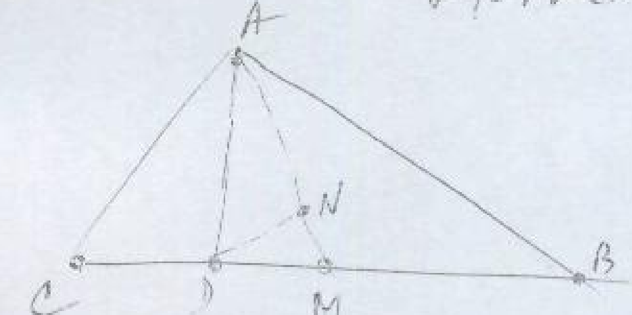
Soluție. Avem: $\sqrt{k} \le \sqrt{n}$ pentru orice $k \le n \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} \le \frac{1}{\sqrt{k}}$

Și atunci: $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{\sqrt{n}}{2} \ge \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{\sqrt{n}}{2}$ sau

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{\sqrt{n}}{2} \ge \frac{n}{\sqrt{n}} - \frac{\sqrt{n}}{2} = \frac{n}{2\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{2}$$

Acum este suficient să arătăm că există n natural astfel încât: $\frac{\sqrt{n}}{2} > 2009 \Rightarrow n > 2^2 \cdot 2009^2$. Putem lua de exemplu $n = 2^2 \cdot 2009^2 + 1$.

Problema 3



Fie $AD \perp BC$, M mijlocul lui BC și $DN \perp AM$. Deoarece $\triangle ABC$ dreptunghic și AM mediană rezultă că $AM = BM = CM = 16$cm

și triunghiul AMB este isoscel deci $AM = MB$, $m(\widehat{AMD}) = 75^\circ$

dar $\triangle ADM$ este dreptunghic $\Rightarrow m(\widehat{DAM}) = 15^\circ$, dar DN este înălțimea corespunzătoare ipotenuzei $\Rightarrow DN = \frac{AM}{4} = \frac{16}{4} = 4$cm

(înălțimea corespunzătoare ipotenuzei unui triunghi dreptunghic cu un unghi de 15° este un sfert din ipotenuză)

$$A_{\triangle ADM} = \frac{AM \cdot DN}{2} = \frac{16\cdot 4}{2} = 32\text{cm}^2$$