OLIMPIADA DE MATEMATICĂ TULCEA

FAZA LOCALĂ - 12 FEBRUARIE 2011

Clasa a V-a

SUB. I Fie şirul de numere naturale 2; 6 ; 10 ; 14; 18;…

a) Stabiliţi care dintre numerele: 1009, 2010 şi 2011 sunt termeni ai şirului.
b) Câte elemente are mulţimea $\mathbf{N} \cap \{2;\ 6;\ 10;\ 14;\ 18;\ \ldots;\ 2222\}$?
c) Calculaţi suma $2 + 6 + 10 + 14 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + 2010$

SUB. II

a) Calculaţi $a=2011^3-2011^2\cdot 2010-(2011\cdot 2010^2-2010^3)$.
b) Arătaţi că numărul a-1 se divide cu 67, iar a+1 nu se divide cu 67
c)

Prof. Mihalea Dumitru

SUB. III Din 80 lei s-au cumpărat un număr de stilouri şi de 4 ori mai multe creioane. Preţurile sunt exprimate prin numere naturale. Ştiind că 5 stilouri şi 20 de creioane costă 200 lei să se afle câte creioane şi câte stilouri s-au cumpărat.

Prof. Mihalea Dumitru

Clasa a VI-a

SUB. I Fie numărul $a=2^{4n+3}\cdot 5^{2n+1}+3\cdot 20^{2n}-4^{2n+1}\cdot 5^{2n}$ unde *n* este număr natural nenul.

a) Arătaţi că a se divide cu 39
b) Arătaţi că a se termină în cel puţin 2 zerouri
c) Arătaţi că a:39 este un pătrat perfect

SUB. II Fie numărul $a=\frac{1}{1000}+\frac{1}{1001}+\frac{1}{1002}+\ldots+\frac{1}{2010}$

a) Arătaţi că $a<1{,}02$
b) Calculaţi: $a\cdot\left(1+\frac{1}{1001}+\frac{1}{1002}+\frac{1}{1003}+\ldots+\frac{1}{2011}\right)-(1+a)\cdot\left(\frac{1}{1001}+\frac{1}{1002}+\frac{1}{1003}+\ldots+\frac{1}{2011}\right)$
c)

Prof. Mihalea Dumitru

SUB. III Se consideră triunghiul ΔABC în care AB < AC. Fie punctele $E \in AB$; $F \in AC$ astfel încât $AE \equiv AC$ şi $AF \equiv AB$, iar $EF \cap BC = D$.

a) Arătaţi că BC=FE
b) Arătaţi că dacă [AD este bisectoarea unghiului $\angle BAC$, atunci DE=DC

Clasa a VII-a

SUB. I Fie proporțiile: $\frac{a}{2}=\frac{b}{3}$ și $\frac{b}{2}=\frac{c}{3}$.

a) Să se determine cele mai mici numere naturale m, n, p astfel ca : $\frac{a}{m}=\frac{b}{n}=\frac{c}{p}$.

b) Pentru m, n și p determinați la punctul anterior, aflați a, b, c știind că $a^2b+b^2c+c^2a=744$

SUB. II Fie ABCD un paralelogram. Bisectoarea unghiului A intersectează diagonala BD în M, iar bisectoarea unghiului D intersectează diagonala AC în N.

a) Demonstrați că $DM\cdot AB=MB\cdot AD$.

b) Demonstrați că MN este paralelă cu AD.

SUB. III a) Demonstrați că $\frac{d}{k(k+d)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+d}$

b) Arătați că: $1-\frac{2}{1\cdot(1+2)}-\frac{3}{(1+2)(1+2+3)}-\frac{4}{(1+2+3)(1+2+3+4)}-\ \dots$

$\dots-\frac{100}{(1+2+3+\dots+99)(1+2+3+\dots+100)}<0{,}0002.$

Prof. Mihalea Dumitru

Clasa a VIII-a

SUB. I Se consideră fracția $F=\frac{x^3+\ b-2a\ \ x^2+a\cdot\ \ a-2b\ \ x+a^2b}{x^3-\ b+2a\ \ x^2+a\cdot\ \ a+2b\ \ x-a^2b}$,

unde: x, a, b sunt numere reale

a) Simplificați fracția.

b) Determinați domeniul de existență al fracției.

SUB. II Fie numărul real x$=a^2+4b^2-a-4b+\frac{7}{4}$, unde a și b sunt numere reale

a) Arătați că x$\geq\frac{1}{2}$.

b) Aratați că x$\geq$1,5 –a - 2b pentru orice a și b numere reale reale.

SUB. III

Fie un cub ABCDA'B'C'D', de latură 4cm și P un punct interior cubului.

a) Demonstrați că suma distanțelor de la P la fețele cubului este constantă.

b) Demonstrați că suma distanțelor de la P la vârfurile cubului este mai mare sau egală cu $16\sqrt{3}$

c) Dacă $P\in[BD']$ astfel încât $BP=3\cdot PD'$ calculați suma distanțelor la muchiile laterale AA', BB', CC' și DD'.

Prof. Mihalea Dumitru