

BAREM DE CORECTARE

CLASA A VIII- A

BAREM

Avem $\sqrt{\frac{y+z+t}{x}} \cdot 1 \leq \frac{\frac{y+z+t}{x}+1}{2} = \frac{x+y+z+t}{2x}$ ($m_g \leq m_a$)..... **2p**

$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{x}{y+z+t}} \geq \frac{2x}{x+y+z+t}$ **2p**

Analog $\sqrt{\frac{y}{z+t+x}} \geq \frac{2y}{x+y+z+t}$
 $\sqrt{\frac{z}{t+x+y}} \geq \frac{2z}{x+y+z+t}$
 $\sqrt{\frac{t}{x+y+z}} \geq \frac{2t}{x+y+z+t}$ **1p**

Însumând inegalitățile obținem:

$\sqrt{\frac{x}{y+z+t}} + \sqrt{\frac{y}{z+t+x}} + \sqrt{\frac{z}{t+x+y}} + \sqrt{\frac{t}{x+y+z}} \geq 2$ **1p**

Egalitatea se realizează $\Leftrightarrow \sqrt{\frac{y+z+t}{x}} \cdot 1 = \frac{\frac{y+z+t}{x}+1}{2} = \frac{x+y+z+t}{2x} \Leftrightarrow \frac{y+z+t}{x} = 1$

$\Leftrightarrow y + z + t = x$ și relațiile analoage, care adunate conduc la $x+y+z+t=0$ (fals)..... **1p**

SUBIECTUL II

a) Cum $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ac)$ **1p**

$\Rightarrow (a+b+c)^2 - 12(a+b+c) = 2(ab+bc+ac) \Rightarrow$

$(a+b+c)(a+b+c - 12) = 2(ab+bc+ac) \Rightarrow 2$ divide $a+b+c$ sau 2 divide $a+b+c-12 \Rightarrow$

2 divide pe $a+b+c$ **1p**

Deci $a+b+c = 2n$ și $2n(2n - 12) = 2(ab+bc+ac) \Leftrightarrow 2n(n - 6) = ab+bc+ac \rightarrow (ab+bc+ac) : 2$ **1p**

b) Cum $a^2 + b^2 + c^2$ par \Rightarrow

I. Două din cele trei numere sunt impare sau

II. Toate cele trei numere sunt pare..... **1p**

I. Înlocuind $a=2x+1$, $b=2y+1$, $c=2z$, obținem:

$(2x+1)^2 + (2y+1)^2 + (2z)^2 = 12(2x+1+2y+1+2z) = 2(x^2+x+y^2+y+z^2)+1 = 12(x+y+z+1)$ (fals)... **1p**

II. Pentru $a=2x$, $b=2y$, $c=2z$ avem

$4x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 24(x+y+z) \Leftrightarrow x^2 - 6x + y^2 - 6y + z^2 - 6z = 0$

$\Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y - 3)^2 + (z - 3)^2 = 27$ **1p**

Finalizare: $(a,b,c) \in \{ (12,12,12); (16,8,8); (16,8,4); (16,4,4) \}$ **1p**

SUBIECTUL III

a) Cum MN este linie mijlocie în $\Delta ABC \Rightarrow MN \parallel AC$. Dar $AC \parallel A'C'$ și $MN \subset (MNP) \Rightarrow A'C' \parallel (MNP)$.
 Cum $P \in A'C'$ și $P \in (MNP) \Rightarrow A'C' \subset (MNP)$ și atunci $d[A';(MNP)] = 0$ cm.....**2p**

b) Fie $ND = (PB'N) \cap (ABC)$, $D \in [AC] \Rightarrow (A'AC) \cap (PB'N) = PD$.

Cum $B'P \perp (A'AC)$ și $B'P \subset (B'PN) \Rightarrow (B'PN) \perp (A'AC)$. Construim $A'F \perp PD \Rightarrow d[A';(PB'N)] = A'F$.
 Deducem că $A'F$ este înălțime pentru $\Delta A'PD$. Aflăm PD, construind $DL \perp A'C'$.

Cum $(ABC) \parallel (A'B'C') \Rightarrow B'P \parallel ND$ și cum $NC \parallel B'C' \Rightarrow \Delta PC'B' \sim \Delta DCN$ (U.U.) $\Rightarrow CD = \frac{1}{2} \cdot C'P$,

adică $CD = 2\sqrt{3}$ cm și $PL = 2\sqrt{3}$ cm.

În ΔPDL , dr. în L, deducem că $PD = 2\sqrt{19}$ cm.

Cum $A'F \cdot PD = A'P \cdot DL$, atunci $A'F = \frac{16\sqrt{57}}{19}$ cm $\Rightarrow d[A';(PB'N)] = \frac{16\sqrt{57}}{19}$ cm..... **3p**

c) Cum $A'C' \parallel MN$ și $MN \subset (B'MN)$, iar $P \in (A'C')$ deducem că $d[A';(MB'N)] = d[P;(MB'N)]$.

Notăm $PR = (A'AC) \cap (PB'B)$, $R \in (AC)$ și $S \in B' = (B'MN) \cap (PB'B)$, $S \in (MN)$.

Cum $(ABC) \parallel (A'B'C') \Rightarrow B'P \parallel BR \Rightarrow AR = RC$ și $MS = SN$.

Cum $AB = 8\sqrt{3}$ cm $\Rightarrow BR = 12$ cm $\Rightarrow SR = 6$ cm, iar $PR = AA' = 8$ cm. Cum $MN \perp BR$ și $MN \perp PR$,
 iar $MN \subset (B'MN) \Rightarrow (B'MN) \perp (PB'B)$.

Cum $(B'MN) \cap (PB'B) = B'S \Rightarrow d[P;(MB'N)] = d(P; B'S)$.

Construim $PG \perp B'S$ și $SE \perp P B'$. În $\Delta SP B'$, avem: $PB' \cdot SE = SB' \cdot PG$.

Din $\Delta SE B'$, deducem că $SB' = 10$ cm și înlocuind, avem că $12 \cdot 8 = 10 \cdot PG$.

Deci $PG = \frac{12 \cdot 8}{10} \Rightarrow d[A';(MB'N)] = 9,6$ cm **2p**

SUBIECTUL IV

Tetraedrele de vârf B sau de vârf C' sau de vârf A și bază ACD' , pentru că muchiile laterale sunt respectiv congruente, sunt congruente \Rightarrow

$$m(AB, \widehat{ACD'}) = m(CC', \widehat{ACD'}) =$$

$$m(D'A', \widehat{ACD'}) (*)$$

$$\text{Notăm } d(M, (ACD')) = MM_1,$$

$$d(N, (ACD')) = NN_1$$

$$d(P, (ACD')) = PP_1 \dots\dots\dots \mathbf{2p}$$

a) $(MNP) \parallel (ACD') \Leftrightarrow MM_1 = NN_1 = PP_1 \Leftrightarrow \Delta MM_1A \cong \Delta NN_1C \cong \Delta PP_1D' \Leftrightarrow AM = CN = D'P \dots \mathbf{2p}$

b) Dacă $(MNP) \parallel (ACD') \Leftrightarrow AM = CN = D'P = x \in (0, a)$ atunci :

$$MN^2 = NP^2 = PM^2 = (a - x)^2 + a^2 + x^2 \Leftrightarrow MN = NP = PM \Leftrightarrow \Delta MNP \text{ echilateral} \dots\dots\dots \mathbf{1p}$$

$$\Rightarrow S_{\Delta MNP} = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4} (2a^2 + 2x^2 - 2ax) \text{ are valoarea minimă} \Leftrightarrow x^2 - ax + a^2 = \left[\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{3a^2}{4} \right] - \text{minim} \Leftrightarrow \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a}{2} \Leftrightarrow M \text{ mijlocul lui } [AB] \dots \mathbf{1p}$$

$$\text{Avem } MN^2 = \frac{6a^2}{4} \Rightarrow \min S_{\Delta MNP} = \frac{3\sqrt{3}a^2}{8} \dots\dots\dots \mathbf{1p}$$

