BAREM DE CORECTARE

CLASA A VIII- A

BAREM

Avem $\sqrt{\frac{y+z+t}{x}\cdot 1} \leq \frac{\frac{y+z+t}{x}+1}{2} = \frac{x+y+z+t}{2x}\ (m_g \leq m_a)$... **2p**

$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{x}{y+z+t}} \geq \frac{2x}{x+y+z+t}$ **2p**

Analog $\sqrt{\frac{y}{z+t+x}} \geq \frac{2y}{x+y+z+t}$

$\sqrt{\frac{z}{t+x+y}} \geq \frac{2z}{x+y+z+t}$

$\sqrt{\frac{t}{x+y+z}} \geq \frac{2t}{x+y+z+t}$ **1p**

Însumând inegalitățile obținem:

$\sqrt{\frac{x}{y+z+t}}+\sqrt{\frac{y}{z+t+x}}+\sqrt{\frac{z}{t+x+y}}+\sqrt{\frac{t}{x+y+z}} \geq 2.$ **1p**

Egalitatea se realizează $\Leftrightarrow \sqrt{\frac{y+z+t}{x}\cdot 1} = \frac{\frac{y+z+t}{x}+1}{2} = \frac{x+y+z+t}{2x} \Leftrightarrow \frac{y+z+t}{x} = 1$

$\Leftrightarrow y+z+t = x$ și relațiile analoage, care adunate conduc la x+y+z+t=0 (fals)….. **1p**

SUBIECTUL II

a) Cum $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac)$ **1p**

$\Rightarrow (a+b+c)^2 - 12(a+b+c)=2(ab+bc+ac) \Rightarrow$

$(a+b+c)(a+b+c-12) = 2(ab+bc+ac) \Rightarrow$ 2 divide a+b+c sau 2 divide a+b+c–12 $\Rightarrow$

2 divide pe a+b+c. **1p**

Deci a+b+c = 2n şi $2n(2n-12)=2(ab+bc+ac) \leftrightarrow 2n(n-6)=ab+bc+ac \rightarrow (ab+bc+ac) \vdots 2$….**1p**

b) Cum $a^2+b^2+c^2$ par$\Rightarrow$

I. Două din cele trei numere sunt impare sau

II. Toate cele trei numere sunt pare…………………………………………………… **1p**

I. Înlocuind a=2x+1, b=2y+1, c=2z , obținem:

$(2x+1)^2+(2y+1)^2+(2z)^2 =12(2x+1+2y+1+2z)= 2(x^2+x+y^2+y+z^2)+1 = 12(x+y+z+1)$ (fals)…**1p**

II. Pentru a=2x, b=2y, c=2z avem

$4x^2+4y^2+4z^2 = 24(x+y+z) \leftrightarrow x^2 - 6x + y^2 - 6y + z^2 - 6z = 0$

$\leftrightarrow (x-3)^2 + (y-3)^2 + (z-3)^2 = 27$…………………………………………… **1p**

Finalizare: $(a,b,c) \in \{ (12,12,12); (16,8,8); (16,8,4); (16,4,4)\}$ ……………………… **1p**

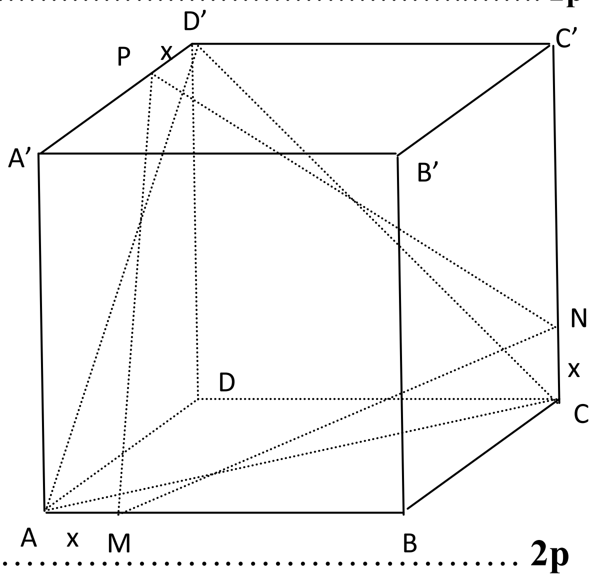
SUBIECTUL III

a) Cum MN este linie mijlocie înΔABC$\Rightarrow$MN//AC. Dar AC// $A'C'$ şi MN$\subset$(MNP) $\Rightarrow$ $A'C'$ //(MNP).
Cum P$\in$ $A'C'$ şi P$\in$(MNP)$\Rightarrow$ $A'C'$ $\subset$(MNP) şi atunci d[A';(MNP)]= 0 cm……………………………**2p**

b) Fie N $D=(PB'N)\cap(ABC), D\in[AC]\Rightarrow(A'AC)\cap(PB'N)=PD$.
Cum $B'P\perp(A'AC)$ şi $B'P\subset(B'PN)\Rightarrow(B'PN)\perp(A'AC)$.Construim $A'F\perp PD$ $\Rightarrow$d[A';$(PB'N)]=A'F$.
Deducem că $A'F$ este înălţime pentru Δ $A'PD$. Aflăm PD,construind $DL\perp A'C'$.
Cum (ABC)//($A'B'C'$) $\Rightarrow$ $B'P$//ND şi cum NC// $B'C'$ $\Rightarrow$ ΔP C' B' ~ΔDCN(U.U.)$\Rightarrow CD=\frac{1}{2}\cdot C'P$,
adică CD=2 $\sqrt{3}$ cm şi PL=2 $\sqrt{3}$ cm.
În ΔPDL, dr. în L,deducem că PD= $2\sqrt{19}$ cm.
Cum $A'F\cdot PD=A'P\cdot DL$, atunci $A'F=\frac{16\sqrt{57}}{19}$ cm $\Rightarrow$d[A';$(PB'N)]=\frac{16\sqrt{57}}{19}$ *cm*.…………………… **3p**

c) Cum $A'C'$ //MN şi MN$\subset$($B'MN$) ,iar P$\in$ $(A'C')$ deducem că d[A';$(MB'N)$] =d[P;(M B' N)].
Notăm PR=($A'AC$) $\cap$(P B' B),R$\in$(AC)şi S $B'=(B'MN)\cap(PB'B), S\in(MN)$.
Cum(ABC)//($A'B'C'$) $\Rightarrow$ B' P//BR$\Rightarrow$AR=RC şi MS=SN.
Cum AB=8 $\sqrt{3}$ cm$\Rightarrow$BR=12cm$\Rightarrow$ SR=6cm, iar PR=AA'=8 cm.Cum MN$\perp$BR şi MN$\perp$PR,
iar MN$\subset$($B'MN$) $\Rightarrow$($B'MN$) $\perp$ $(PB'B)$.
Cum ($B'MN$)$\cap$$(PB'B)$= $B'S$ $\Rightarrow$d[P;(M B' N)]=d(P; $B'S$).
Construim PG$\perp$ $B'S$ şi SE$\perp$P B'. În ΔSP B',*avem*: $PB'\cdot SE=SB'\cdot PG$.
Din ΔSE B' ,deducem că S $B'=10cm$ şi înlocuind, avem că 12·8=10·PG.
Deci PG=$\frac{12\cdot 8}{10}\Rightarrow d[A';(MB'N)]=9{,}6$ cm ……………………………………………………..…… **2p**

SUBIECTUL IV



Tetraedrele de vârf B sau de vârf C' sau de vârf A și bază ACD', pentru că muchiile laterale sunt respectiv congruente, sunt congruente $\Rightarrow$
$m\left(AB,\widehat{(ACD')}\right)=m\left(CC',\widehat{(ACD')}\right)=m\left(D'A',\widehat{(ACD')}\right)$ (*)
Notăm $d\left(M,(ACD')\right)=MM_1$,
$d\left(N,(ACD')\right)=NN_1$
$d\left(P,(ACD')\right)=PP_1$ ………………………………………………………………… **2p**

a) $(MNP)\,||\,(ACD')\Leftrightarrow MM_1=NN_1=PP_1\Leftrightarrow\Delta MM_1A\equiv\Delta NN_1C\equiv\Delta PP_1D'\Leftrightarrow AM=CN=D'P$ **2p**

b) Dacă $(MNP)\,||\,(ACD')\Leftrightarrow AM=CN=D'P=x\in(0,a)$ atunci :
$MN^2=NP^2=PM^2=(a-x)^2+a^2+x^2\Leftrightarrow MN=NP=PM\Leftrightarrow\Delta MNP$ echilateral ……………………………………………………………………....**1p**
$\Rightarrow S_{\Delta MNP}=\frac{l^2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{4}(2a^2+2x^2-2ax)$ are valoarea minimă $\Leftrightarrow$ $x^2-ax+a^2=\left[\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{3a^2}{4}\right]$ - minim $\Leftrightarrow$ $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2=0\Leftrightarrow x=\frac{a}{2}\Leftrightarrow$ M mijlocul lui [AB]….**1p**
Avem $MN^2=\frac{6a^2}{4}\Longrightarrow\min S_{\Delta MNP}=\frac{3\sqrt{3}a^2}{8}$………………………………………. **1p**